

01;03

Об одной приближенной аналитической модели течения в первой бочке перерасширенной струи

© А.В. Омельченко, В.Н. Усков, М.В. Чернышов

Балтийский государственный технический университет, С.-Петербург
E-mail: vmu@peterlink.ru

Поступило в Редакцию 16 октября 2002 г.

Предлагается простая аналитическая модель течения в первой бочке плоской перерасширенной струи. Адекватность модели подтверждается сравнением с результатами численных расчетов. На основе предложенной модели решается задача определения высоты маховского диска в струе.

Рассматривается истечение невязкого совершенного газа со сверхзвуковой скоростью ($M_0 > 1$) из плоского профилированного сопла на режиме перерасширения (нерасчетность струи $n < 1$). В результате истечения на кромке сопла образуется прямолинейный скачок уплотнения I (рис. 1), интенсивность $J_1 = 1/n = p_\infty/p_A$ которого характеризуется перепадом статических давлений в окружающей атмосфере (p_∞) и на кромке сопла (p_A). Известные интенсивность скачка J_1 и число Маха M_0 позволяют определить угол $\beta_1(M_0, J_1)$ поворота потока на скачке и число Маха $M_1(M_0, J_1)$ за скачком (см., например, [1]). В случае сильно перерасширенной струи (интенсивность $J_1 \in [J_c(M_0), J_*(M_0)]$, где $J_c(M_0)$ — интенсивность стационарной маховской конфигурации [2], а $J_*(M_0)$ — интенсивность, соответствующая числу Маха за скачком, равному единице) скачок уплотнения может отражаться от оси симметрии нерегулярно, с образованием в точке T тройной конфигурации ударных волн (рис. 1). За отраженным скачком 2 течение сверхзвуковое, а за маховским диском 3 — дозвуковое. Условия динамической совместности [2]

$$J_1 J_2 = J_3, \quad \beta_1(M_0, J_1) + \beta_2(M_1, J_2) = \beta_3(M_0, J_3)$$

на исходящем из точки T тангенциальном разрыве τ позволяют по заданной интенсивности J_1 падающего скачка и числу Маха M_0 перед

через скорость звука происходит в критическом сечении CC' , соответствующем минимуму функции $y(x)$ (рис. 1). В-третьих, полагается, что течение за скачком 2 безвихревое, а характеристики первого семейства в области TBD прямолинейны. Как следствие, течение в этой области представляет собой простую волну Прандтля–Майера, угол ϑ_2 наклона линий тока к оси абсцисс, статическое давление p_2 и число Маха M_2 в которой связаны с соответствующими параметрами $\vartheta_{2T} = \beta_3$, p_{2T} и M_{2T} в точке T соотношениями [2]

$$\vartheta_2 = \beta_3 + \omega(M_{2T}) - \omega(M_2), \quad \frac{p_2}{p_{2T}} = \left[\frac{\mu(M_{2T})}{\mu(M_2)} \right]^{(1+\varepsilon)/2\varepsilon}, \quad (2)$$

$$\omega(M) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctg \sqrt{\varepsilon(M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}.$$

В этих формулах $p_{2T} = p_1 J_1 J_2$, $M_{2T}(M_1, J_2)$ — число Маха за скачком 2. Первые два предположения являются традиционными и часто используются при численных расчетах течений в сверхзвуковых перерасширенных струях методом характеристик [3,4]. Обоснованность третьего предположения следует из анализа результатов этих расчетов.

Первое и третье предположения наряду с условиями равенства статических давлений ($p_3 = p_2$, $p_{3T} = p_{2T}$) и углов наклона линий тока ($\vartheta_2 = \vartheta_3$, $\vartheta_{2T} = \vartheta_{3T}$) по обе стороны τ позволяют из решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'(x) = \operatorname{tg} \vartheta \quad (3)$$

с использованием соотношений (1), (2) определить форму участка TD тангенциального разрыва τ (рис. 1). Третье предположение позволяет, используя результаты решения задачи о взаимодействии скачка уплотнения со слабым разрывом, определить форму криволинейного скачка TB (см. [5]). Такое взаимодействие приводит к разрыву ΔK кривизны скачка, величина которого пропорциональна разрыву ΔN кривизны линии тока на слабом разрыве:

$$\Delta K = \Phi(M, J) \Delta N. \quad (4)$$

Коэффициент пропорциональности $\Phi(M, J)$ зависит от числа Маха M перед скачком и интенсивности J скачка в точке взаимодействия [2].

В работе [5] доказываемся, что при сделанных допущениях из формулы (4) можно получить следующую связь кривизны K_{s2} скачка 2, его интенсивности J_2 и числа Маха M_1 потока перед скачком с кривизной K_ϑ линии тока течения за ним:

$$K_{s2} = \Phi(M_1, J_2)K_\vartheta. \quad (5)$$

Здесь K_{s2} — кривизна скачка уплотнения 2 в его произвольной точке H , J_2 и M_1 — интенсивность скачка и число Маха потока перед ним, K_ϑ — кривизна линии тока в точке H пересечения характеристики H_1H первого семейства со скачком (рис. 1). Последняя выражается через кривизну K_τ тангенциального разрыва в точке H_1 по формуле

$$K_\vartheta = \frac{\chi(\vartheta)}{x_H - x_c}, \quad (6)$$

$$x_c = x_{H1} - \frac{\chi(\vartheta)}{K_\tau}, \quad \chi(\vartheta) = -\frac{(1 - \varepsilon)(M^2(\vartheta) - 1) \cos(\vartheta + \alpha)}{M^3(\vartheta)}.$$

Здесь x_{H1} , x_H — абсциссы точек H_1 и H , ϑ и $M(\vartheta)$ — угол наклона линии тока к оси абсцисс и число Маха на характеристике H_1H , $\alpha = \arcsin(1/M)$. Несложно показать, что (5) с учетом (6) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка относительно искомой функции $y(x)$, описывающей форму криволинейного скачка 2. Интегрирование проводится в диапазоне $[x_T, x_B]$, причем верхний предел интегрирования определяется из условия $y_B - y_A = \operatorname{tg} \beta_1(x_B - x_A)$ (рис. 1).

Первая характеристика BD центрированной волны 4 является одновременно характеристикой второго семейства простой волны TBD . Следовательно, на этой характеристике выполняется соотношение

$$\omega(M_{2D}) + \vartheta_{2D} = \omega(M_{2B}) + \vartheta_{2B},$$

позволяющее наряду с (1)–(3) определить координаты точки D пересечения характеристики BD с тангенциальным разрывом τ . Кроме того, характеристика BD представляет собой слабый разрыв: на ней происходит разрыв кривизны линий тока. В частности, в точке D рвется кривизна тангенциального разрыва τ , в результате чего меняется знак кривизны — правее точки D тангенциальный разрыв является выпуклым (рис. 1).

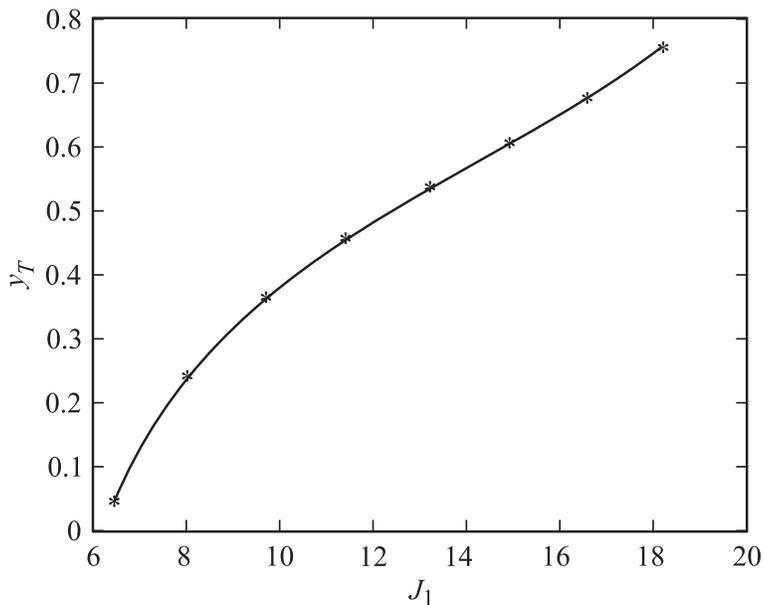


Рис. 2. Сравнение аналитических и численных расчетов высоты маховского диска.

Как показывают численные расчеты [3,4], угол β_4 разворота потока в центрированной волне BDF не превосходит нескольких градусов. Это позволяет выбрать β_4 в качестве малого параметра и решать задачу взаимодействия простых волн TBD и BDF , а также задачу взаимодействия волны BDF с тангенциальным разрывом τ методом, описанным в работе [6]. В результате такого подхода несложно получить обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее в первом приближении форму тангенциального разрыва τ от точки D до точки, в которой скорость на нижней стороне τ не достигнет критического значения ($M_3 = 1$).

Приведенные выше соотношения позволяют рассчитать течение в случае, если наряду с M_0 и J_1 задана высота y_T маховского диска Z (рис. 1). Последняя определяется методом итераций. На каждом шаге задаются M_0 , J_1 , а также некоторое значение y_T . Используя описанный

выше алгоритм, строятся форма скачка 2 и форма тангенциального разрыва τ . Разрыв τ строится до тех пор, пока не выполнится одно из условий — $\vartheta_\tau = 0$ или $M_3 = 1$. В первом случае высота u_T слишком велика, во втором — слишком мала. С учетом сделанных выводов о величине u_T высота маховского скачка уточняется и производится следующий шаг итерации. Таким образом, задача расчета высоты маховского скачка сводится к пристрелке этой высоты как граничного условия описанной краевой задачи.

На рис. 2 приводятся результаты расчета высоты u_T маховского скачка уплотнения при $M_0 = 5$ и различных значениях J_1 . Сплошной линией построена зависимость $u_T(J_1)$, полученная аналитически. Звездочками на рисунке помечены данные, полученные в работах [3,4]. Как видно из рисунка, погрешность предложенного метода не превосходит 0.5 процента. Для сравнения можно отметить, что в похожей задаче о маховском отражении в плоском сужающемся канале [7,8] результаты имеющихся приближенно-аналитических решений отличаются от экспериментальных и численных данных на 30–40 процентов.

Заключение. В работе предложена простая аналитическая модель течения в первой бочке плоской перерасширенной струи совершенного невязкого газа, истекающего из профилированного сопла. Расчет поля течения сводится к пристрелке граничного условия краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты расчетов показывают высокую точность модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект № 99–785).

Список литературы

- [1] Омельченко А.В., Усков В.Н. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С. 118–126.
- [2] Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995.
- [3] Авдеевский В.С., Ашратов Э.А., Пирумов У.Г. Сверхзвуковые неизобарические струи газа. М.: Машиностроение, 1985.
- [4] Аверенкова Г.И., Ашратов Э.А., Волконская Т.Г. и др. Сверхзвуковые струи идеального газа. Ч. 2. М.: Изд-во МГУ, 1971.

- [5] Мешков В.Р., Омельченко А.В., Усков В.Н. Взаимодействие скачка уплотнения со встречной волной разрежения // Вестник С.-Пб. ун-та. Сер. 1. 2002. В. 2 (№ 9). С. 99–106.
- [6] Lin C.C. // Journal of Mathematics and Physics. 1954. V. XXXIII. N 2. P. 117–134.
- [7] Azevedo D.J., Liu C.S. // AIAA J. 1993. V. 31. N 1. P. 83–90.
- [8] Hornung H.G., Robinson M.L. // J. Fluid Mech. 1982. V. 123. P. 155–164.