01;03

О росте амплитуды осцилляций основной моды заряженной капли при внутреннем нелинейном резонансе

© *С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Д.Ф. Белоножко*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 19 сентября 2002 г.

Показано, что при заряде капли, докритическом для проявления ее неустойчивости по отношению к собственному заряду, может реализоваться резонансная раскачка основной моды осцилляций капли за счет ее нелинейного взаимодействия с более высокими модами.

В связи с проблемой выяснения физического механизма инициирования разряда молнии в грозовом облаке [1,2] представляется важным исследовать возможность нелинейной резонансной раскачки амплитуды основной моды колебаний капли, несущей электрический заряд, меньший критического по Рэлею, за счет ее взаимодействия с более высокими модами [3,4].

1. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности капли идеальной, несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ, коэффициентом поверхностного натяжения σ. Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд равен Q, а объем определяется объемом сферы с радиусом R. В начальный момент времени $t = 0$ сферическая форма капли претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды. Зададимся целью найти спектр возникающих капиллярных осцилляций капли (форму капли) в последующие моменты времени $t > 0$.

Пусть уравнение, описывающее поверхность капли, в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $R = \sigma = \rho = 1$, имеет вид: $r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t)$, $|\xi| \ll 1$.

Математическая формулировка задачи выглядит следующим образом:

$$\Delta\psi(\mathbf{r},t)=0; \qquad \Delta\Phi(\mathbf{r},t)=0;$$

$$r\to 0: \qquad \psi(\mathbf{r},t)\to 0; \quad r\to\infty; \quad \Phi(\mathbf{r},t)\to 0;$$

$$r=1+\xi(\theta,t): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\theta};$$

$$\Delta p-\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2+\frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2=\operatorname{div}\mathbf{n}; \quad \Phi(r,\theta,t)=\Phi_S(t).$$

Учтем также условия сохранения полного заряда капли, объема и неподвижности ее центра масс:

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S(\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi)ds=Q, \quad S=[r=1+\xi(\theta,t),\,0\leqslant\theta\leqslant\pi,\,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi];$$

$$\int_V r^2dr\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{4}{3\pi}, \quad V=[0\leqslant r\leqslant 1+\xi(\theta,t),\,0\leqslant\theta\leqslant\pi,\,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi];$$

$$\int_V \mathbf{e}_r r^3 dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=0.$$

Начальные условия зададим в виде деформации равновесной сферической формы капли и равенства нулю скорости движения поверхности:

$$t=0: \qquad \xi(\theta)=\xi_0P_0(\mu)+\xi_1P_1(\mu)+\varepsilon\sum_{i\in\Xi}h_iP_i(\mu);$$

$$\sum_{i\in\Xi}h_i=1; \qquad \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial t}=0.$$

Ξ — множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод; $\mu\equiv\cos\theta$; Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности капли; $\Phi(\mathbf{r},t)$ и $\psi(\mathbf{r},t)$ — потенциалы: электрический и поля скоростей; $\Phi_S(t)$ — постоянный вдоль поверхности капли электрический потенциал; ε — амплитуда начального возмущения; $P_i(\mu)$ — полиномы Лежандра порядка i; h_i — коэффициенты, определяющие парциальный вклад i-той колебательной моды в суммарное начальное возмущение; ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые из условий неизменности объема и неподвижности центра масс капли.

2. Решая задачу методом многих масштабов, получим выражение, описывающее изменение во времени формы поверхности капли:

$$r(\theta, t) = 1 + \varepsilon \sum_{i \in \Xi} M_i^{(1)}(t) P_i(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) + O(\varepsilon^3);$$

$$M_i^{(1)}(t) = h_i \cos(\omega_i t); \quad M_0^{(2)}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i}{(2i+1)} \big(1 + \cos(2\omega_i t)\big);$$

$$M_1^{(2)}(t) = -\sum_{i \in \Xi} \frac{9 i h_{i-1} h_i}{(2i-1)(2i+1)} \cos(\omega_i t) \cos(\omega_{i-1} t);$$

$$M_n^{(2)}(t) = \big[N_n(t) - N_n(0) \cos(\omega_n t)\big]; \quad n \geqslant 2;$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \Xi} h_i h_j \big[\lambda_{ijn}^{(+)} \cos((\omega_i + \omega_j) t) + \lambda_{ijn}^{(-)} \cos((\omega_i - \omega_j) t)\big];$$

$$\omega_n^2 = n(n-1)\big[(n+2) - W\big]; \quad W = \frac{Q^2}{4\pi}; \quad \lambda_{ijn}^{(\pm)} = \frac{\gamma_{ijn} \pm \omega_i \omega_j \eta_{ijn}}{\omega_n^2 - (\omega_i \pm \omega_j)^2};$$

$$\gamma_{ijn} = K_{ijn} \Bigg[\omega_i^2 (n - i + 1) + 2n\big(j(j+1) - 1\big)$$

$$+ \big(j(i+1) - i(2i - 2n + 7) + 3\big) n \frac{W}{2}\Bigg] + \alpha_{ijn} \left[\frac{1}{i} \omega_i^2 + n \frac{W}{2}\right];$$

$$\eta_{ijn} = K_{ijn} \left(\frac{n}{2} - i + 1\right) + \alpha_{ijn} \frac{1}{i} \left(1 + \frac{n}{2j}\right);$$

$$K_{ijn} = \big[C_{i0j0}^{n0}\big]^2; \qquad \alpha_{ijn} = -\sqrt{i(i+1)j(j+1)}\, C_{i0j0}^{n0} C_{i(-1)j1}^{n0},$$

C_{i0j0}^{n0} и $C_{i(-1)j1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [5].

Из выражений для коэффициентов $\lambda_{ijn}^{(\pm)}$ видно, что при выполнении для частот мод с номерами i, j, n одного из соотношений

$$\omega_n^2 - (\omega_i \pm \omega_j)^2 = 0 \tag{1}$$

амплитуда n-й моды $M_n^{(2)}(t)$ будет содержать малый знаменатель, что и соответствует наличию резонансного обмена энергией между i-, j- и n-й модами. Отметим, что i и j есть номера из спектра мод, формирующих начальное возмущение равновесной сферической формы капли, а номер n соответствует моде, возбуждающейся во втором порядке малости из-за взаимодействия.

3. Анализ показывает, что если в (1) частоты ω_n определять для заряженной капли идеальной жидкости, то никакие комбинации i- и j-й мод ни при каких докритических значениях параметра W не позволяют вызвать резонанс основной ($n = 2$) моды, хотя третья, четвертая и другие низкие моды резонансно раскачиваются.

Добиться резонансной раскачки основной моды можно, если учесть, что в реальной ситуации на частоты осцилляций оказывает влияние вязкость жидкости, приводя к их снижению. Строго решить задачу о расчете нелинейных осцилляций вязкой капли пока не представляется возможным ввиду крайней сложности проблемы. Для качественного же анализа воспользуемся резонансным соотношением (1) и известным [6,7] дисперсионным уравнением для капиллярных осцилляций заряженной вязкой капли, имеющим две пары комплексно сопряженных решений, различающихся знаками частот (которые легко находятся при использовании пакета программ аналитических вычислений типа Mathematica). В нижеследующем анализе будем пользоваться решением с отрицательной вещественной частью (описывающей затухание) и положительной мнимой (определяющей частоты осцилляций). Решения дисперсионного уравнения определены на трехлистной римановой поверхности, так как выражаются через корень третьей степени из минус единицы, имеющий, как известно, три различных комплексных значения. В этой связи нижеследующее рассмотрение проведем на том листе римановой поверхности, на котором $\sqrt[3]{-1} = -1$. В итоге в приближении малой вязкости $\nu \ll 1$ (ν — кинематическая вязкость жидкости) получим выражение для частоты осцилляций с поправкой на влияние вязкости:

$$\omega_n = \sqrt{n(n-1)\big[(n+2)-W\big]}\left[1 - \frac{(n-1)\big[13+4n(5+2n)\big]}{2n(2+n-W)}\,\nu^2\right].$$

Это решение и будем использовать в (1) при отыскании резонансно взаимодействующих мод. В табл. 1–4 приведены результаты таких расчетов для различных значений безразмерной вязкости, когда в результате взаимодействия высоких i- и j-й мод резонансно раскачивается основная мода. В последней колонке приводятся значения параметра W,

Таблица 1–4. Номера мод i и j и величина параметра W, при которых имеет место резонансная раскачка основной моды осцилляций заряженной капли, рассчитанные при различных значениях безразмерной вязкости ν.

Таблица 1.

$\nu = 0.04$		
i	j	W
84	86	0.72
85	87	1.70
86	88	2.46
87	89	3.03
97	95	3.29
98	96	2.95
99	97	2.54
100	98	2.08
101	99	1.56
102	100	0.99
103	101	0.37

Таблица 2.

$\nu = 0.06$		
i	j	W
35	37	1.30
36	38	2.62
44	42	3.10
45	43	2.57
46	44	1.93
47	45	1.20
48	46	0.37

Таблица 3.

$\nu = 0.1$		
i	j	W
16	14	3.12
17	15	2.41
18	16	1.48
19	17	0.36

Таблица 4.

$\nu = 0.2$		
i	j	W
5	3	1.75
6	4	0.29

при которых реализуется данный резонанс. Напомним, что критическое для реализации неустойчивости сферической заряженной капли по отношению к собственному заряду значение W равно четырем. Из приведенных таблиц несложно видеть, что существует много возможностей для резонансной раскачки основной моды капли при значении параметра W, на порядок меньшем критического. Это обстоятельство порождает оптимизм в деле исследования возможности реализации инициирования разряда молнии коронным разрядом в окрестности крупной, свободно падающей в облаке капли воды [1,2], поскольку заряды необходимой величины на крупных каплях регистрируются при натурных измерениях [8]. Напомним, что коронный разряд может начаться в окрестности крупной капли, принявшей в результате возбуждения основной моды вытянутую форму, при значении параметра W, много меньшем критического, в силу увеличения напряженности поля у вершин капли за счет перераспределения заряда [1,9–11]. Остается отметить, что возбуждение в крупной ($R = 100\,\mu\mathrm{m} \div 2.5\,\mathrm{mm}$) капле, свободно падающей в грозовом облаке, высоких мод осцилляций происходит за счет ее столкновений с более мелкими капельками ($R = 4 \div 15\,\mu\mathrm{m}$), на которые приходится максимум концентрации облачных капель [8].

Оправданием используемому, не вполне корректному подходу, может служить то обстоятельство, что для резонансного взаимодействия капиллярно-гравитационных волн положение резонанса внутримодового взаимодействия не зависит от наличия вязкости и имеет один и тот же вид и для идеальной [12], и для вязкой [13] жидкостей.

4. Заключение. Нелинейная резонансная раскачка основной моды осцилляций заряженной капли возбужденными высокими модами может иметь место при существенно докритических (в смысле линейной устойчивости) значениях ее собственного заряда.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

Список литературы

[1] *Дячук В.А., Мучник В.М.* // АН СССР. 1979. Т. 248. С. 60–63.
[2] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
[3] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
[4] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН МЖГ. 2001. № 3. С. 163–174.
[5] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
[6] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // Изв. АН СССР. 1991. № 5. С. 11–17.
[7] *Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. В. 7. С. 1–8.
[8] *Облака* и облачная атмосфера / Справочник. И.П. Мазин, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитов. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
[9] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 3. С. 19–28.

[10] *Щукин С.И., Григорьева А.И.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. В. 8. С. 49–54.
[11] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. В. 12. С. 26–30.
[12] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 385–395.
[13] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 19. С. 1–9.