01;03

О внутреннем нелинейном резонансе капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности вязкой глубокой жидкости

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 20 сентября 2002 г.
В окончательной редакции 3 декабря 2002 г.

Впервые получено аналитическое выражение для профиля периодических волн конечной амплитуды на заряженной поверхности глубокой вязкой электропроводной жидкости, допускающее предельный переход к идеальной жидкости. Показано, что положение внутреннего нелинейного резонанса капиллярно-гравитационных волн не зависит от вязкости и наличия поверхностного заряда. Выяснилось, что при резонансном взаимодействии энергия от длинных капиллярно-гравитационных волн с волновым числом $k_* \equiv \sqrt{\rho g/2\gamma}$ перекачивается к более коротким волнам с волновым числом $k_0 \equiv \sqrt{2\rho g/\gamma}$.

1. Задача исследования нелинейных волн в вязкой глубокой жидкости привлекает тем, что дает ключ к пониманию ряда важных для приложений явлений, представление о которых на настоящий момент ограничено той информацией, которую можно извлечь из линейной модели движения свободной поверхности жидкости. К таким явлениям относятся: неустойчивость поверхности жидкости по отношению к упругим напряжениям [1] и по отношению к содержащимся в жидкости инактивным поверхностно-активным веществам [2]; колеба-

тельная неустойчивость поверхности жидкости при конечной скорости перераспределения электрического заряда [3]. В основе всех этих явлений лежит баланс вязких напряжений на свободной поверхности с напряжениями иной природы, поэтому для их исследования приближение невязкой жидкости принципиально непригодно. В [4] предложена модель нелинейной периодической волны, распространяющейся по поверхности вязкой глубокой жидкости. Настоящее исследование является естественным обобщением этой модели на случай, когда свободная поверхность электрически заряжена.

2. Пусть несжимаемая ньютоновская жидкость с кинематической вязкостью ν и плотностью ρ в декартовой системе координат $Oxyz$, плоскость $z = 0$ которой совпадает с невозмущенной свободной поверхностью жидкости, а ось Oz направлена вертикально вверх, заполняет полупространство $z \leqslant 0$. Внешняя среда характеризуется диэлектрической проницаемостью ε, является идеальным диэлектриком и действует с давлением p_0 на поверхность жидкости. Жидкость считается идеальным проводником, несущим однородно распределенный поверхностный заряд, такой что электрическое поле над искаженной поверхностью в пределе $z \to \infty$ стремится к однородному с напряженностью $E_0\mathbf{e}_z$. Требуется определить профиль волны, распространяющейся по свободной поверхности. Пусть $u = u(x, z, t)$ и $v = v(x, z, t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей в жидкости, которые для простоты считаются независимыми от координаты y, а $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_z$ — орты осей Ox и Oz. Тогда отклонение свободной поверхности $\xi = \xi(x, t)$ от равновесной формы $z = 0$, поле скоростей $\mathbf{U} = u\cdot\mathbf{e}_x + v\cdot\mathbf{e}_z$ и электрический потенциал Φ над жидкостью удовлетворяют начально-краевой задаче:

$$z > \xi: \qquad \Delta\Phi = 0;$$

$$z < \xi: \qquad \partial_t\mathbf{U} + \mathrm{rot}(\mathbf{U}) \times \mathbf{U} = -\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz\right) + \nu \cdot \Delta\mathbf{U};$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{U} = 0;$$

$$z = \xi: \qquad \partial_t\xi + u \cdot \partial_x\xi = v;$$

$$p - p_0 - 2\rho\nu\mathbf{n} \cdot \big((\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U}\big) + \frac{\varepsilon}{8\pi}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 = \gamma \cdot \mathrm{div}\,\mathbf{n};$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \big((\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U}\big) + \mathbf{n} \cdot \big((\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U}\big) = 0; \quad \Phi = 0;$$

$$z \to \infty: \qquad \boldsymbol{\nabla}\Phi \to -\mathbf{E}_0;$$

$$z \to -\infty: \qquad \mathbf{U} \to 0;$$

$$t = 0: \qquad \xi = F(x);$$

$$z \leqslant \xi: \qquad \mathbf{U} = \mathbf{U}^0 = \mathbf{U}^0(x, z) = u^0(x, z)\mathbf{e}_x + v^0(x, z)\mathbf{e}_z.$$

Здесь t — время; p — давление внутри жидкости; ∂_t и ∂_x — частные производные по времени и координате; $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — орты касательной и нормали к свободной поверхности жидкости.

3. По аналогии с тем, как это было сделано в [4], для нелинейных капиллярно-гравитационных волн на незаряженной поверхности вязкой жидкости можно найти во втором приближении по амплитуде следующее выражение для профиля нелинейной периодической капиллярно-гравитационной волны на поверхности глубокой электропроводной вязкой жидкости с однородно заряженной свободной поверхностью:

$$\xi = a \cdot \cos\bigl[\mathrm{Im}(S) \cdot t - kx\bigr] + a^2\Bigl(\mathrm{Re}(\Lambda) \cdot \cos\bigl[2(\mathrm{Im}(S) \cdot t - kx)\bigr]$$

$$- \mathrm{Im}(\Lambda) \cdot \sin\bigl[2(\mathrm{Im}(S) \cdot t - kx)\bigr]\Bigr) \cdot \exp\bigl[2\mathrm{Re}(S) \cdot t\bigr]; \tag{1}$$

комплексная частота S определяется как решение известного дисперсионного уравнения для капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности вязкой жидкости [5,6], а выражение для коэффициента Λ отличается от приведенного в [4] только учетом поверхностного заряда свободной поверхности жидкости и здесь не приводится ввиду крайней громоздкости.

Полученное выражение для профиля нелинейной периодической капиллярно-гравитационной волны интересно тем, что квадратичная по амплитуде волны добавка имеет резонансный вид. Это обстоятельство особенно наглядно проявляется при переходе к идеальной жидкости (при $\nu \to 0$), когда соотношение (1) существенно упрощается и принимает вид

$$\xi = a \cdot \cos(kx - \omega_0 t) + a^2 \cdot A_0 \cdot \cos(2kx - 2\omega_0 t); \tag{2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\rho}\left(\rho g + \gamma k^2 - k\,\frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi}\right); \qquad A_0 = \frac{k(\rho g + \gamma k^2 - k\varepsilon E_0^2/2\pi)}{2(\rho g - 2\gamma k^2)}.$$

При $E_0 = 0$ выражение (2) совпадает с известным решением для профиля нелинейной волны на поверхности идеальной незаряженной жидкости, полученным в [7]. Из (2) видно, что добавки второго порядка малости к амплитуде волны в идеальной жидкости при $k < k_* \equiv \sqrt{\rho g/(2\gamma)}$ и $k > k_*$ имеют различные знаки: для длинных (гравитационная ветвь) волн $k < k_*$ величина A_0 положительна, а для коротких (капиллярная ветвь) волн $k > k_*$ — отрицательна. При $k = k_*$ имеет место внутренний нелинейный резонанс трехмодового взаимодействия капиллярно-гравитационных волн [4,5], а амплитуда добавки второго порядка малости стремится к бесконечности. Вид решения (2) в окрестности точки $k = k_*$ подробно исследован в [7]. Исследование профиля волны на заряженной поверхности вязкой глубокой жидкости при $k = k_*$ (выражение (1)) при отличной от нуля вязкости показало, что само положение резонанса при $\nu \neq 0$ не изменяется, но амплитуда добавки второго порядка малости в окрестности резонанса остается конечной.

На рис. 1 в безразмерных переменных, в которых $\rho = \gamma = g = 1$, приведены зависимости модуля амплитуды $A = \sqrt{\mathrm{Re}(\Lambda)^2 + \mathrm{Im}(\Lambda)^2}$ добавки второго порядка малости к профилю волны в выражении (1) от волнового числа k при $\nu = 10^{-2}$ и различных значениях безразмерного параметра Тонкса–Френкеля $W = \varepsilon E_0^2/4\pi\sqrt{\rho g \gamma}$, характеризующего устойчивость поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду (поверхность становится неустойчивой при $W \geqslant 2$) [8]. Из рис. 1 видно, что с ростом W величина добавки второго порядка малости к амплитуде волны при малых значениях ($W < 1$) уменьшается (рис. 1, a), а при больших ($W > 1$) быстро растет (рис. 1, b). Такое поведение модуля амплитуды характерно и для идеальной жидкости, что несложно видеть из аналитического выражения (2) для A_0: при $W = 1$ коэффициент A_0 проходит через ноль и меняет свой знак.

Как выше уже отмечалось, наличие у жидкости вязкости и электрического заряда не сказывается на положении внутреннего нелинейного резонанса, который при $\nu \neq 0$ и $W \neq 0$ по-прежнему имеет место при $k = k_*$. В использованном приближении второго порядка малости под резонансным взаимодействием волн подразумевается трехмодовое взаимодействие, реализующееся между тремя капиллярно-гравитационными волнами, движущимися в одном направлении, когда их волновые числа и частоты связаны условиями $k_1 + k_2 = k_3$ и $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ [9]. В принятых безразмерных переменных $\omega^2 = k + k^3 - Wk^2$. Отметим, что сформулированные [9] условия взаимодействия в рассматриваемом случае нелинейных капиллярно-гравитационных волн на заряженной

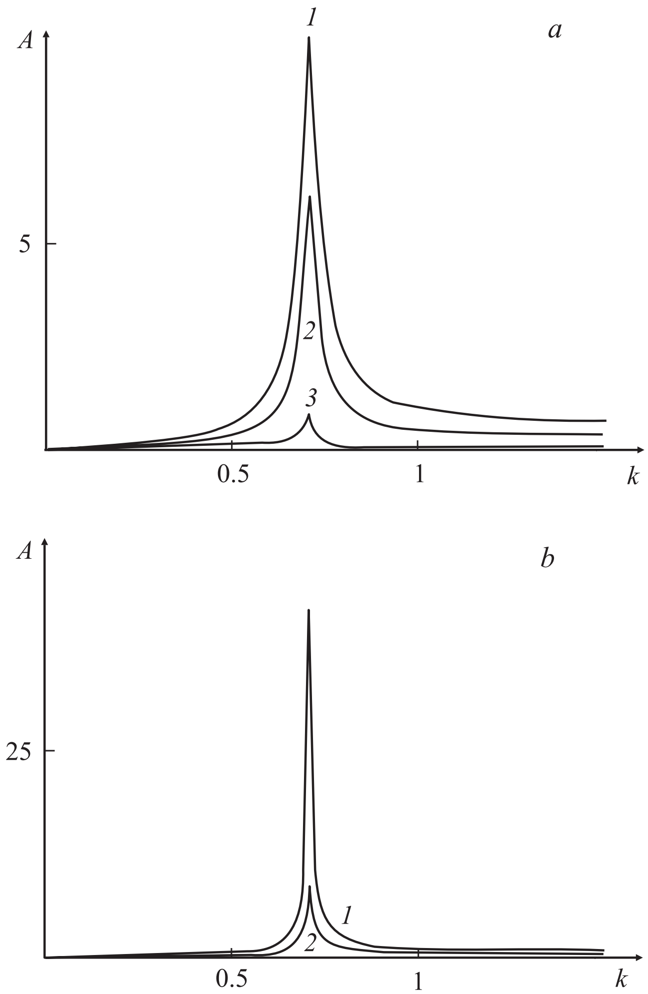

Рис. 1. Зависимости безразмерного модуля амплитуды A добавки второго порядка малости от безразмерного волнового числа k, при $\nu = 10^{-2}$ и различных значениях параметра W: *a* — *1* — $W = 0$; *2* — $W = 0.5$, *3* — $W = 1$; *b* — *1* — $W = 1.5$; *2* — $W = 2$.

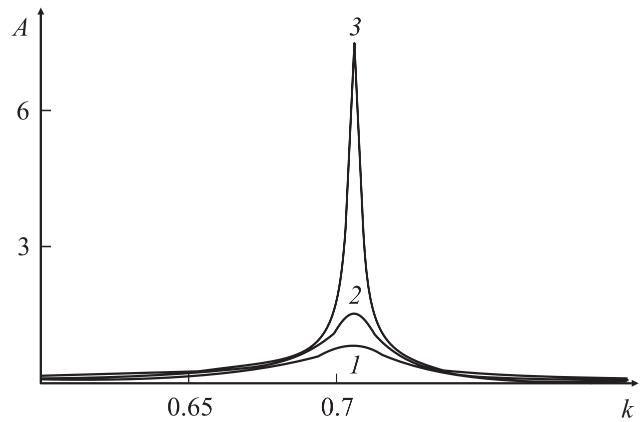

Рис. 2. Зависимости, аналогичные представленным на рис. 1, построенные при $W = 1$ и различных значениях безразмерной вязкости ν: *1* — $\nu = 10^{-2}$; *2* — $\nu = 5 \cdot 10^{-3}$; *3* — $\nu = 10^{-3}$.

поверхности жидкости выполняются для любых значений W вплоть до критических $(W_{cr} = k + k^{-1})$ в форме $2k_* = k_0$ и $2\omega_* = \omega_0$, т. е. имеет место так называемый „вырожденный“ резонанс, когда волна с волновым числом $k_* \equiv \sqrt{\rho g / 2\gamma}$ дважды взаимодействует с волной $k_0 \equiv \sqrt{2\rho g / \gamma}$, отдавая ей энергию.

Указанные закономерности поведения капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости, в частности, означают, что за счет нелинейного взаимодействия волн в малой окрестности волнового числа $k = k_0$ волны будут иметь амплитуды, превышающие амплитуды волн с волновыми числами $k \ll k_0$ и $k \gg k_0$. При увеличении напряженности электростатического поля E_0 у поверхности жидкости волны с $k \approx k_0$, согласно [10–12], будут иметь преимущество в смысле реализации тенденции к потере устойчивости по отношению к поверхностному заряду (будут обладать бо́льшими величинами инкрементов неустойчивости в начальный момент времени [12]), и именно их рост определит физическую картину реализации неустойчивости.

Влияние вязкости, которое представляется очевидным, на величину добавки второго порядка малости к амплитуде волны иллюстрирует рис. 2, построенный по соотношению (1).

Заключение. Положение внутреннего нелинейного резонанса капиллярно-гравитационных волн не зависит от вязкости и наличия заряда на свободной поверхности. При резонансном взаимодействии энергия от капиллярно-гравитационных волн с волновым числом $k_* \equiv \sqrt{\rho g/2\gamma}$ перекачивается к более коротким волнам с волновым числом $k_0 \equiv \sqrt{2\rho g/\gamma}$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

Список литературы

[1] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 4. С. 89–94.
[2] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. В. 2. С. 22–29.
[3] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 22. С. 1–6.
[4] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 19. С. 1–9.
[5] *Алиев И.Н., Филиппов А.В.* // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94–98.
[6] *Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 9. С. 12–21.
[7] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1970. V. 40. P. 671–684.
[8] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[9] *Филлипс М.О.* // Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 197–220.
[10] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. В. 9. С. 9–12.
[11] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. С. 15–22.
[12] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 9. С. 30–36.