

01

Методика определения длительности переходного процесса для динамических систем, находящихся в режиме хаотических колебаний

© А.А. Короновский, А.В. Стародубов, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ГосУНЦ „Колледж“
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 12 ноября 2002 г.

Посвящено методике определения длительности переходного процесса для эталонной двумерной динамической системы с дискретным временем (отображения Эно), находящейся в режиме хаотических колебаний.

В большинстве работ, посвященных исследованию сложного поведения нелинейных динамических систем, внимание исследователей акцентируется прежде всего на установившихся режимах (которые могут быть как периодическими, так и хаотическими). При этом начальная стадия исследуемого процесса (переходный процесс) считается несущественной и отбрасывается, а основное внимание концентрируется на характеристиках установившихся колебательных режимов (размерность аттракторов, ляпуновские экспоненты и т.п.), бифуркациях, возникающих при изменении значений управляющих параметров, сценариях перехода к хаосу и т.п. В то же самое время переходные процессы подчиняются определенным закономерностям [1] и в ряде случаев позволяют получить важную информацию о системе в целом и ее динамике [2].

При изучении переходных процессов важную роль играет определение момента, когда переходный процесс завершился (с некоторой заданной наперед точностью ε) и система достигла (опять-таки с точностью ε) своего асимптотического состояния. В том случае, когда асимптотическое состояние конечномерной динамической системы является периодическим (неподвижная устойчивая точка, периодический

цикл), существует достаточно простой и эффективный алгоритм определения момента времени, отвечающего за достижение системой этого состояния [1,3]. Суть этого метода кратко может быть охарактеризована следующим образом: для динамических систем с дискретным временем каждый элемент периодического аттрактора, состоящего из небольшого конечного числа точек, окружается ε -окрестностью и затем отслеживается, когда изображающая точка попадает в одну из этих ε -окрестностей. (Отметим, что любая потоковая конечномерная динамическая система может быть сведена к отображению с помощью процедуры сечения Пуанкаре [4,5]). Однако подобный подход не может быть применен в таком виде к динамическим системам, находящимся в хаотическом режиме. Основной сложностью в данном случае является то, что число точек, принадлежащих хаотическому аттрактору, оказывается бесконечным. В связи с этим возникают сложности с определением необходимого числа точек аттрактора, по которым будет определяться длительность переходного процесса; это число точек оказывается очень большим и сильно зависит от точности ε , с которой определяется длительность переходного процесса [3]. Одновременно значительно увеличивается время, необходимое для перебора элементов аттрактора.

Целью настоящей работы является создание эффективной методики определения длительности переходного процесса для динамической системы с дискретным временем

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad (1)$$

находящейся в хаотическом режиме. В качестве такой динамической системы с дискретным временем была выбрана эталонная двумерная система, известная как отображение Эно [6,7]:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) + by_n, \quad y_{n+1} = x_n. \quad (2)$$

Величины λ и b являются управляющими параметрами, которые определяют режимы колебаний. В настоящей работе использовались значения параметров $\lambda = 2.5453$, $b = 0.5188$, при которых в системе (2) реализуется хаотический режим колебаний.

Под длительностью переходного процесса в системе с дискретным временем будем понимать интервал в K единиц дискретного времени, после завершения которого изображающая точка в фазовом пространстве достигла аттрактора с некоторой наперед заданной точностью ε ,

т. е. для всех $n > K$ выполняется соотношение

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_j^0\| < \varepsilon, \quad (3)$$

где \mathbf{x}_n — точки временной реализации исследуемой динамической системы; \mathbf{x}_j^0 ($j = \overline{1, \dots, M}$) — элементы хаотического аттрактора; ε — точность, с которой определяется длительность переходного процесса. С формальной точки зрения переходный процесс в системе, как правило, длится бесконечно долго, изображающая точка лишь асимптотически стремится к аттрактору при $t \rightarrow \infty$ и за конечный интервал времени никогда его не достигает. В то же самое время в натуральных экспериментах и при численном моделировании поведения различных систем во временной реализации можно выделить участки, отвечающие соответственно установившемуся режиму и переходному процессу [8,9]. Длительность переходного процесса зависит в данном случае от управляющих параметров, начальных условий и точности ε , с которой определяется достижение изображающей точкой аттрактора.

Суть предлагаемой методики следующая: покроем область начальных условий, где расположен аттрактор, сеткой с шагом ε и, выбрав начальное условие \mathbf{x}_0 , т. е. исходную точку из бассейна притяжения аттрактора, проитерировуем систему (1) достаточно большое число раз N , заведомо большее, чем максимальная длительность переходного процесса T_{\max} . В процессе итерирования изображающая точка движется по сетке, описывая аттрактор и попадая в те или иные ячейки сетки. Начиная с момента дискретного времени $i = T_{\max} + 1$ будем подсчитывать количество ячеек, в которые попала исходная точка в результате итерирования. Эти ячейки, покрывающие точки аттрактора \mathbf{x}_j^0 , будем называть ячейками аттрактора. После завершения процесса итерирования получим „опорный“ массив ячеек аттрактора. Зная, какие ячейки принадлежат аттрактору, длительность переходного процесса можно определить следующим образом: если начальная точка \mathbf{x}_0 в процессе итерирования после K единиц дискретного времени „попала“ в ячейку аттрактора, то для данного начального условия длительность переходного процесса, определенная с точностью ε , считается равной K . Очевидно, что для корректного определения длительности переходного процесса желательного найти как можно большее количество ячеек аттрактора.

Поскольку считается, что после переходного процесса длительностью в K единиц дискретного времени изображающая точка достигла

хаотического аттрактора, то для всех $i > K$ должно выполняться соотношение (3). Теоретически возможна ситуация, когда изображающая точка x_i , приблизившись к одной из точек хаотического аттрактора x_j^0 на расстояние, меньшее ε на i -й итерации, на самом деле не достигла аттрактора и на $(i + 1)$ -й итерации условие (3) не выполняется, т.е. в ε -окрестности точки x_{i+1} нет ни одной точки хаотического аттрактора. В этом случае для того, чтобы удостовериться, что переходный процесс действительно завершен, необходимо проверить выполнение условия (3) для m последовательных контрольных точек x_{i+1}, \dots, x_{i+m} . Однако, как было показано в [3], подобная проверка оказывается излишней и лишь существенно увеличивает время, необходимое для корректного определения длительности переходного процесса, что связано с необходимостью перебора большого числа точек хаотического аттрактора.

В данной работе для всех значений точности ε производилось $N = 5 \times 10^8$ итераций, максимальная длительность переходного процесса $T_{\max} = 10^3$. Большое количество итераций необходимо для того, чтобы „опорный“ массив был более полным, являлся хорошим приближением истинного хаотического аттрактора и с необходимой степенью точности обладал всеми его свойствами. В результате численного эксперимента было получено, что для $\varepsilon = 10^{-2}$ количество ячеек аттрактора при соответствующем количестве итераций равно $Z_{attr} = 1228$, для $\varepsilon = 10^{-5/2}$ $Z_{attr} = 5622$, для $\varepsilon = 10^{-3}$ $Z_{attr} = 25\,199$.

Рассмотрим зависимость количества ячеек аттрактора Z_i от числа выполненных итераций i , для которых данные ячейки аттрактора были найдены (рис. 1, а). По характеру зависимости видно, что на начальном этапе временной реализации скорость роста количества ячеек аттрактора достаточно высока, но с увеличением количества итераций она уменьшается, и в конце кривые выходят на насыщение. Это говорит о том, что дальнейший процесс итерирования системы не имеет смысла: добавление новых ячеек в аттрактор больше не происходит или происходит крайне редко. Понятно, что чем с большей точностью (чем меньше величина ε) происходит определение длительности переходного процесса, тем большее число итераций i необходимо провести для того, чтобы соответствующая зависимость Z_i достигла уровня насыщения Z_{attr} .

Зная, какие ячейки плоскости (x, y) принадлежат хаотическому аттрактору, исследуем зависимость длительности переходного процесса

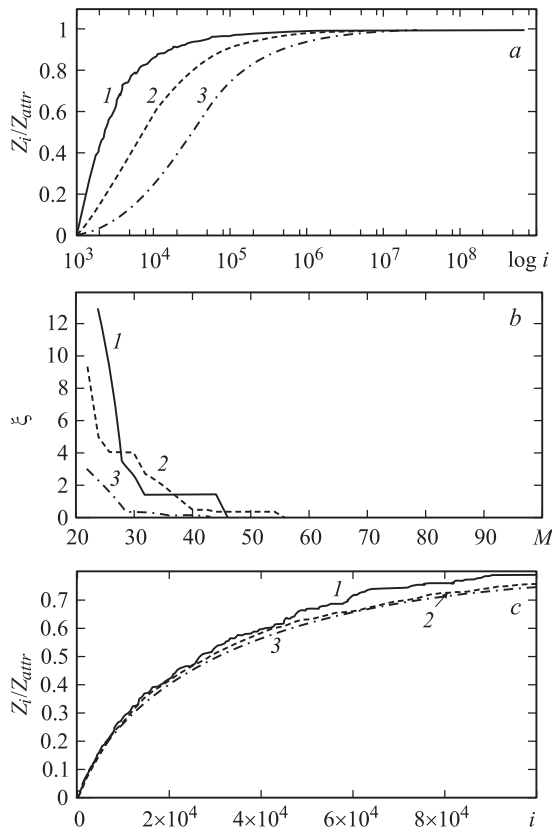


Рис. 1. *a* — зависимость количества ячеек аттрактора Z_i (в нормированных единицах от общего количества ячеек аттрактора Z_{attr} для данного значения ϵ) от количества итераций i для значений управляющих параметров $\lambda = 2.5453$, $b = 0.5188$; *b* — зависимость процента ошибок ξ в определении длительности переходного процесса от используемого процента количества точек аттрактора M для тех же значений управляющих параметров; *c* — наложенные друг на друга с использованием масштабного коэффициента μ зависимости количества ячеек аттрактора Z_i (в нормированных единицах от общего количества ячеек аттрактора Z_{attr} для значения ϵ) от количества итераций i , нормированного на величину μ , для различных значений точности ϵ . *a–c* значения управляющих параметров: $\lambda = 2.5453$, $b = 0.5188$. Начальные условия: $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$. Точность ϵ : 1 — $\epsilon = 10^{-2}$, 2 — $\epsilon = 10^{-5/2}$, 3 — $\epsilon = 10^{-3}$.

отображения Эно для различных начальных условий (x_0, y_0) от количества учтенных ячеек аттрактора Z_{attr} . На рис. 1, *b* приведена зависимость процента ошибок в определении длительности переходного процесса (при использовании $M\%$ ячеек „опорного“ массива) от величины M . Ошибкой в данном случае считается ситуация, при которой длительности переходного процесса для начального условия (x_0, y_0) , определенные по 100% элементов опорного массива и по $M\%$, различаются. В качестве начальных условий был взят массив случайно выбранных точек (x, y) в количестве 10^3 . Ясно, что, чем меньше используется ячеек аттрактора при определении длительности переходного процесса, тем большее число ошибок возникает. Из приведенного рисунка видно, что для всех значений точности ε существует некоторое значение $M < 100\%$, начиная с которого число ошибок при определении длительности переходного процесса оказывается минимальным.

На рис. 2 приведены карты зависимости длительности переходных процессов от начальных условий (x_0, y_0) , построенные с помощью данного метода при использовании различного числа ячеек аттрактора. Карты строились следующим образом: каждая точка плоскости (x, y) выбиралась в качестве начального условия, для системы с данным начальным условием вычислялась длительность переходного процесса, и в зависимости от ее величины точка маркировалась соответствующим цветом. Чем больше была длительность переходного процесса, тем более темным цветом в градациях серого маркировалась точка. Таким образом, хаотический аттрактор оказался окрашенным в белый цвет. Из рисунка видно, что при уменьшении числа ячеек аттрактора, используемых для определения длительности переходного процесса, на карте появляются более темные (или даже черные) точки. Это объясняется тем, что в этом случае длительность переходного процесса для некоторых начальных условий вычисляется некорректно.

Таким образом, из всего вышеизложенного следует, что при определении длительности переходного процесса можно использовать не весь опорный массив, а лишь некоторую его часть, для получения которой нужно выполнить относительно небольшое число итераций i . Понятно, что это число зависит от точности ε , с которой определяется длительность переходного процесса. В связи с этим представляет интерес вопрос о связи емкостной размерности D_0 хаотического аттрактора [10] и числа итераций i отображения (2), необходимого для корректного определения длительности переходного процесса с точностью ε .

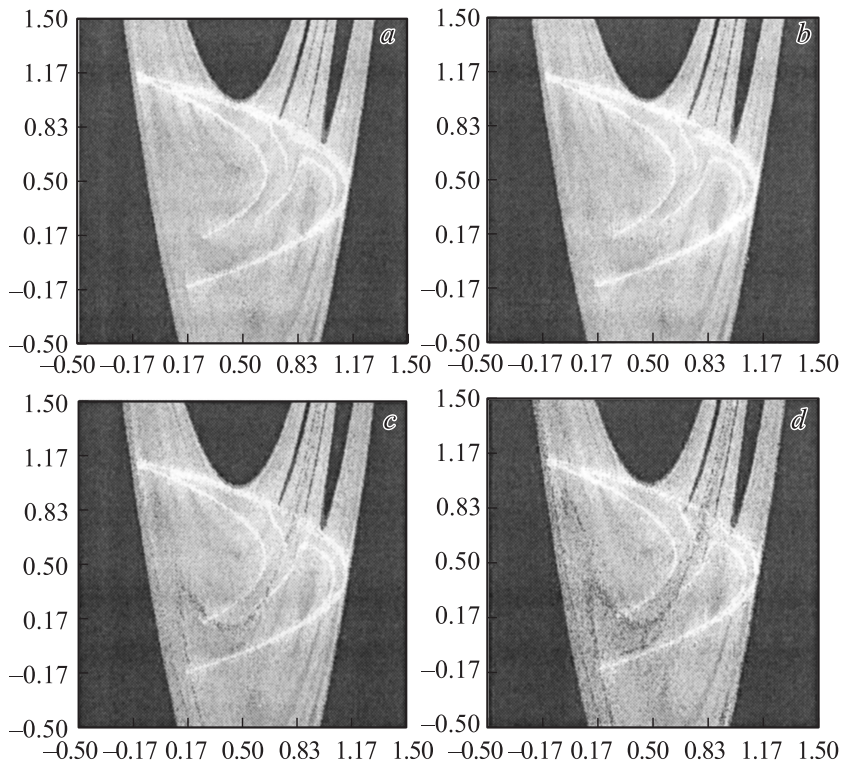


Рис. 2. Градациями серого показана длительность переходных процессов для различных начальных условий в отображении Эно (2). Значения управляющих параметров $\lambda = 2.5453$, $b = 0.5188$, точность $\varepsilon = 10^{-3}$. Максимальная длительность переходного процесса $T = 20$. Использовано: a — 100% ячеек аттрактора, b — 90% ячеек, c — 80% ячеек, d — 60% ячеек. Черным цветом показаны начальные условия, стартуя из которых изображающая точка уходит на бесконечность.

Другими словами, можно ли, используя значение размерности D_0 аттрактора, найти некий масштабный множитель, с помощью которого возможно было бы определять необходимое количество итераций для корректного определения длительности переходного процесса для более высоких значений точности, т.е. для меньших значений ε . Чтобы

выяснить данный факт, была вычислена размерность D_0 аттрактора, значение которой составило $D_0 = 1.31$.

Для двух различных значений точности ε_1 и ε_2 , таких что $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/a$, число ячеек аттрактора будет $N_1(\varepsilon) \sim \varepsilon_1^{-D_0}$ и $N_2(\varepsilon) \sim \varepsilon_2^{-D_0}$. Таким образом, масштабный коэффициент определяется как $\mu = N_2/N_1 = (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{-D_0} = a^{D_0}$. Для случая $a = \sqrt{10}$ величина масштабного коэффициента μ будет определяться как $\mu = 10^{D_0/2} \approx 4.54$. На рис. 1, с приведены зависимости Z_i/Z_{attr} для различных значений точности ε , причем число сделанных итераций i нормировалось на найденный масштабный множитель μ .

Из рисунка видно, что графики с высокой степенью точности соответствуют друг другу. Следовательно, зная необходимое число итераций N_1 для корректного определения длительности переходного процесса для значения точности ε_1 , можно вычислить необходимое число итераций N_2 для любого другого значения ε_2 .

Таким образом, в работе предложен эффективный и быстрый метод определения длительности переходного процесса для систем с дискретным временем, находящихся в хаотическом режиме. Подобный подход может быть применен и для систем с непрерывным временем путем сведения их к отображению методом сечения Пуанкаре.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 01-02-17392 и 00-15-96673), а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

Список литературы

- [1] Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е. // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 3. С. 322–325.
- [2] Bezruchko V.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 036210.
- [3] Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10. № 4.
- [4] Henon M. // Physica. 1982. D5. P. 412–414.
- [5] Kaufmann Z., Lustfeld H. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 055206(R).
- [6] Henon M. // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69–77.

- [7] Хенон М. // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152.
- [8] Jánosi I.M., Tél T. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 2756.
- [9] Короновский А.А., Ремпен И.С., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. // Изв. РАН. Сер. физ. 2002. Т. 66. № 12. С. 1754.
- [10] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.