01;05.4

Модуляционная неустойчивость электромагнитных возбуждений в джозефсоновском переходе в тонкой сверхпроводящей пленке

© *А.И. Ломтев*

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины
E-mail: lomtev@kinetic.ac.donetsk.ua

В окончательной редакции 9 декабря 2002 г.

В рамках нелокальной электродинамики джозефсоновского перехода в тонкой сверхпроводящей пленке исследована модуляционная неустойчивость осциллирующих с джозефсоновской частотой плоских нелинейных волн конечной амплитуды. Получено дисперсионное уравнение для инкремента нарастания амплитудных возмущений. Для указанного типа волн найдены области развития модуляционной неустойчивости. Показано, что модуляционная неустойчивость волн развивается для длинноволновых амплитудных возмущений в конечной области волновых векторов $0 < Q < Q_v$, а для $Q \geqslant Q_v$ волны являются устойчивыми.

Давно возник, но до настоящего времени не ослабевает интерес к исследованию широкого круга явлений неустойчивостей волн в различных нелинейных системах и средах [1,2]. Известно, что сжатие нелинейной волны может происходить как в поперечном, так и в продольном направлении по отношению к направлению распространения волны. В качестве примеров можно привести самофокусировку света, предсказанную Аскарьяном [3], неустойчивость типа разбиения волны на пакеты и самосжатия волновых пакетов — модуляционную неустойчивость, которая была впервые изучена Лайтхиллом [4].

Модуляционная неустойчивость электромагнитных волн в распределенных джозефсоновских переходах описывается неустойчивостью решений уравнения sine-Gordon. Наряду с теоретическим интересом, явление модуляционной неустойчивости имеет ряд практических приложений. Например, оно используется для генерации цепочек сверхкоротких оптических импульсов с высокой частотой повторения, разработки новых логических устройств.

Во многих ситуациях при исследовании модуляционной неустойчивости необходимо рассматривать пространственно-нелокальные модификации уравнения sine-Gordon [5-16]. Из-за различных геометрий задач в перечисленных работах уравнения джозефсоновской электродинамики отличаются видом ядра интегрального оператора, описывающего эффект пространственно-нелокальной связи. Однако во всех этих работах пространственная нелокальность уравнений для разности фаз возникает вследствие нелокальной связи магнитного поля на границе раздела и в сверхпроводнике. Такая причина пространственной нелокальности является универсальной для электродинамики джозефсоновских контактов, а сама нелокальность становится скорее правилом, чем исключением.

Так, в работе [17] для джозефсоновского перехода из массивных сверхпроводников исследована модуляционная неустойчивость осциллирующей с джозефсоновской частотой плоской нелинейной электромагнитной волны постоянной конечной амплитуды, обусловленная нарастанием малых возмущений амплитуды и приводящая к разбиению такой волны на пакеты.

Тем более актуальным представляется исследование развития модуляционной неустойчивости нелинейных электромагнитных волн, распространяющихся в джозефсоновском переходе в тонкой сверхпроводящей пленке, которое до сих пор не проводилось.

Одной из нелинейных систем, в которых также может проявляться модуляционная неустойчивость, является переход Джозефсона в ультратонкой сверхпроводящей пленке толщиной $d \ll \lambda$, когда динамика разности фаз на берегах контакта $\varphi(x, t)$ описывается нелинейным интегродифференциальным уравнением sine-Gordon с пространственной нелокальностью [10]:

$$\sin\varphi(x,t) + \frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = l_J \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{eff}}\right)\frac{\partial^2\varphi(x',t)}{\partial x'^2}, \qquad (1)$$

где ω_J — джозефсоновская частота, $l_J = \lambda_J^2/\lambda$, λ_J — джозефсоновская длина, $\lambda_{eff} = \lambda^2/d$ — пирловская глубина проникновения, а нелокальное по пространственной переменной интегральное ядро $K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{eff}}\right)$ имеет вид

$$K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{eff}}\right) = \frac{2\lambda_{eff}}{\pi}\int\limits_0^{\infty} dq\,\frac{J_0\big(q(x-x')\big)}{1+2q\lambda_{eff}}. \qquad (2)$$

Здесь $J_0(qx)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Нелинейность уравнения (1) порождается синусоидальной зависимостью джозефсоновского тока сквозь переход от разности фаз на берегах этого перехода.

Рассмотрим эволюцию нелинейных осциллирующих с джозефсоновской частотой ω_J волн малой, но конечной амплитуды типа бризера в переходе. Представим разность фаз $\varphi(x,t)$ в виде

$$\varphi(x,t) = u(x,t)\exp(-i\omega_J t) + u^*(x,t)\exp(i\omega_J t), \quad |\varphi(x,t)| \ll 1. \qquad (3)$$

Учтем в уравнении (1) нижайший порядок нелинейности на основной частоте ω_J и ограничимся приближением медленно меняющейся во времени амплитуды $u(x,t)$, когда справедливо неравенство $|\partial^2 u(x,t)/\partial t^2| \ll 2\omega_J |\partial u(x,t)/\partial t|$. Тогда из уравнения (1) при подстановке в него поля (3) для амплитуды $u(x,t)$ получим следующее уравнение:

$$i\,\frac{2}{\omega_J}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}|u(x,t)|^2 u(x,t) + l_J\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{eff}}\right)\frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial x'^2} = 0. \qquad (4)$$

Это нелинейное нелокальное уравнение Шредингера, которое имеет точное решение вида плоской нелинейной волны с постоянной амплитудой A:

$$u_0(t) = A\exp(iA^2\omega_J t/4), \quad A \ll 1. \qquad (5)$$

Исследуем устойчивость такого решения. О характере распада плоской волны (5) можно судить по развитию ее малых возмущений. С этой целью допустим, что случайно возникло малое возмущение амплитуды

$$u(x,t) = [A + \psi(x,t)]\exp(iA^2\omega_J t/4), \quad |\psi(x,t)| \ll A. \qquad (6)$$

Из уравнения (4) для малого возмущения $\psi(x,t)$ следует линейное уравнение

$$i\,\frac{2}{\omega_J}\,\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}A^2[\psi(x,t) + \psi^*(x,t)] + l_J\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{eff}}\right)\frac{\partial^2 \psi(x',t)}{\partial x'^2} = 0. \qquad (7)$$

Полагая в уравнении (7) $\psi(x,t) = v(x,t) + iw(x,t)$, для действительной и мнимой частей возмущения амплитуды получаем систему уравнений

$$\frac{2}{\omega_J}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + l_J\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{eff}}\right)\frac{\partial^2 w(x',t)}{\partial x'^2} = 0,$$

$$-\frac{2}{\omega_J}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + A^2 v(x,t) + l_J\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{eff}}\right)\frac{\partial^2 v(x',t)}{\partial x'^2} = 0. \qquad (8)$$

Для возмущений амплитуды вида (произвольные возмущения можно представить как суперпозицию таких полей)

$$v(x,t) = V(Q,\Omega)\exp\left[i(Qx - \Omega t)\right],$$

$$w(x,t) = W(Q,\Omega)\exp\left[i(Qx - \Omega t)\right] \qquad (9)$$

из системы уравнений (8) следует дисперсионное соотношение $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}(\widetilde{Q})$:

$$\widetilde{\Omega}^2 = \frac{L}{2\pi}\widetilde{Q}^2 J(\widetilde{Q})\left[\frac{2L}{\pi}\widetilde{Q}^2 J(\widetilde{Q}) - A^2\right], \qquad (10)$$

где $J(\widetilde{Q})$ определяется интегралом

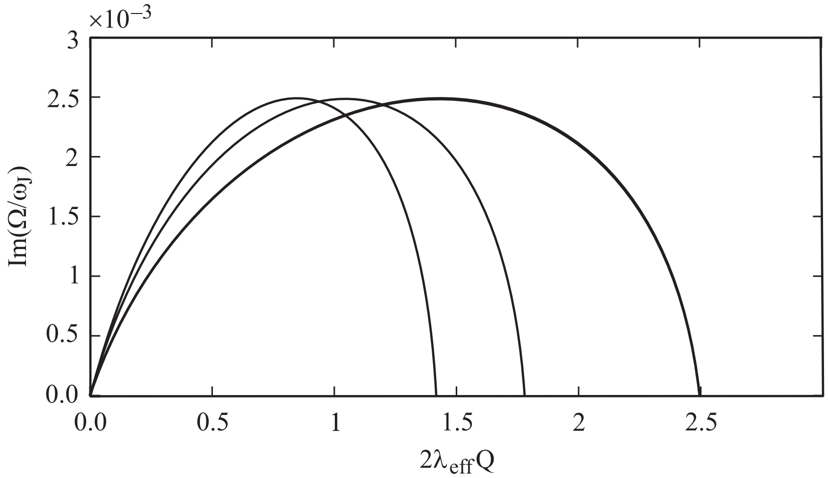
$$J(\widetilde{Q}) = \int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+\widetilde{Q}\cosh x},$$

который равен (см. также работу [10])

$$J(\widetilde{Q}) = \frac{1}{2\sqrt{1-\widetilde{Q}^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\widetilde{Q}^2}}{1-\sqrt{1-\widetilde{Q}^2}} \quad \text{при} \quad \widetilde{Q} \leqslant 1,$$

$$J(\widetilde{Q}) = \frac{2}{\sqrt{\widetilde{Q}^2-1}}\arctan\frac{\sqrt{\widetilde{Q}^2-1}}{1+\widetilde{Q}} \quad \text{при} \quad \widetilde{Q} \geqslant 1, \qquad (11)$$

а также введены безразмерные величины $\widetilde{Q} = 2Q\lambda_{eff}$, $\widetilde{\Omega} = \Omega/\omega_J$, $L = l_J/2\lambda_{eff}$.



Области модуляционной неустойчивости нелинейной плоской электромагнитной волны (5) при величинах амплитуды $A = 10^{-1}$ и параметра $L = 0.5 \cdot 10^{-2}$ — кривая *1*, $L = 0.75 \cdot 10^{-2}$ — кривая *2* и $L = 10^{-2}$ — кривая *3*.

Дисперсионное уравнение (10) с учетом (11) для инкремента нарастания возмущения имеет положительное решение $\operatorname{Im}\widetilde{\Omega}(\widetilde{Q}) > 0$ в области волновых векторов $0 < \widetilde{Q} < \widetilde{Q}_v$, в которой малые возмущения амплитуды (9) будут нарастать со временем и при этом будет развиваться модуляционная неустойчивость плоской нелинейной электромагнитной волны (5). В области волновых векторов $\widetilde{Q} \geqslant \widetilde{Q}_v$ $\operatorname{Im}\widetilde{\Omega}(\widetilde{Q}) \equiv 0$ и волна является устойчивой. Пограничный волновой вектор $\widetilde{Q}_v$ определяется из уравнения

$$\widetilde{Q}_v^2 J(\widetilde{Q}_v) = \frac{\pi A^2}{2L}. \qquad (12)$$

На рисунке показаны области модуляционной неустойчивости плоской нелинейной электромагнитной волны (5) при фиксированной величине амплитуды A для трех значений параметра L.

Максимальное значение инкремента нарастания возмущений равно

$$\left(\operatorname{Im}\widetilde{\Omega}(\widetilde{Q}_m)\right)_{\max} = A^2/4 \qquad (13)$$

и достигается при значении волнового вектора $\widetilde{Q}_m$, являющегося корнем уравнения

$$\widetilde{Q}_m^2 J(\widetilde{Q}_m) = \frac{\pi A^2}{4L}. \tag{14}$$

Осциллирующая с джозефсоновской частотой плоская нелинейная волна в процессе развития модуляционной неустойчивости будет эволюционировать в цепочку импульсов — малоамплитудных бризеров, частота повторения которых определяется периодом модуляции исходной волны $L_0 = 2\pi/Q$, где $0 < Q < Q_v = \widetilde{Q}_v/2\lambda_{eff}$.

Итак, в работе показано, что модуляционная неустойчивость плоской нелинейной волны (5) развивается для длинноволновых амплитудных возмущений в конечной области волновых векторов $0 < Q < \widetilde{Q}_v$. Для возмущений амплитуды в области волновых векторов $Q \geqslant \widetilde{Q}_v$ плоская нелинейная электромагнитная волна (5) является устойчивой.

Экспериментально развитие модуляционной неустойчивости возможно наблюдать в длинных переходах Джозефсона в тонких сверхпроводящих пленках при возбуждении в них осциллирующих с джозефсоновской частотой волн малой, но конечной амплитуды.

В заключение выражаю признательность Ю.В. Медведеву и И.Б. Краснюку за полезные обсуждения, внимание и поддержку, а также благодарность А.Н. Артемову и С.М. Орлу за консультации, связанные с численным счетом.

Список литературы

[1] *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
[2] *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 240 с.
[3] *Аскарьян Г.А.* // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. № 6. С. 1567–1572.
[4] *Lighthill M.J.* // J. Inst. Math. Appl. 1965. V. 1. N 2. P. 269–273.
[5] *Алиев Ю.М., Силин В.П., Урюпин С.А.* // Сверхпроводимость. 1992. Т. 5. № 2. С. 228–235.
[6] *Gurevich A.* // Phys. Rev. B. 1992. V. 46. N 5. P. 3187–3190.
[7] *Иванченко Ю.М., Соболева Т.К.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. № 2. С. 100–102.
[8] *Ivanchenko Yu.M., Soboleva T.K.* // Phys. Lett. A. 1990. V. 147. N 1. P. 65–69.
[9] *Иванченко Ю.М., Соболева Т.К.* // ФТТ. 1990. Т. 32. № 7. С. 2029–2033.
[10] *Mints R.G., Snapiro I.B.* // Phys. Rev. B. 1995. V. 51. N 5. P. 3054–3057.

[11] *Ломтев А.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. № 2. С. 132–138.
[12] *Ломтев А.И.* // ФТТ. 2000. Т. 42. № 1. С. 16–22.
[13] *Ломтев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 9. С. 63–67.
[14] *Кулик И.О., Янсон И.К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970. 273 с.
[15] *Кузовлев Ю.Е., Ломтев А.И.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 5. С. 1803–1809.
[16] *Ломтев А.И.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 6. С. 2256–2262.
[17] *Абдуллаев Ф.Х.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 2. С. 8–11.