01;03

О внутреннем нелинейном четырехмодовом взаимодействии капиллярных осцилляций заряженной капли

© *А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 2 декабря 2002 г.

Впервые получены аналитические выражения с точностью до величин третьего порядка малости для формы образующей нелинейно осциллирующей заряженной капли при многомодовой начальной деформации и поправки к частотам осцилляций, имеющие второй порядок малости, величина которых зависит от спектра мод, определяющих начальную деформацию. В расчетах третьего порядка малости обнаружено, что амплитуда основной моды капли может увеличиваться за счет обмена энергией с более высокими модами в большом количестве возможных четырехмодовых резонансных взаимодействий.

Несмотря на значительный интерес к исследованию нелинейных осцилляций заряженных капель, позволивший обнаружить много неизвестных в линейной теории феноменов (см., например, [1–10] и указанную там литературу), многие вопросы остались за рамками проведенных до сих пор исследований ввиду трудоемкости расчетов. Большая часть ранее проведенных исследований данного направления выполнена во втором порядке малости по амплитуде начального возмущения. В [1,2] выполнены расчеты третьего порядка малости и найдены нелинейные поправки к частотам осцилляций для частных случаев одномодовой начальной деформации, однако само решение выписано лишь во втором порядке малости, что оставило за рамками исследования четырехмодовые резонансы. Приведенные в работах [1,2] поправки к частотам также не могут быть использованы без корректировки, поскольку приведены с опечатками, устранить которые без повторения всех расчетов [2] невозможно ввиду конспективности изложения процедуры расчетов. Ниже изложены результаты расчетов, проведенных в третьем порядке малости при многомодовой начальной деформации капли.

1. Пусть несущая заряд Q капля радиуса R идеальной несжимаемой жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ совершает осесимметричные осцилляции в окрестности равновесной сферической формы. Зададимся целью найти выражение для образующей поверхности колеблющейся капли в любой момент времени.

Математическая формулировка такой задачи полностью аналогична использовавшейся в работах [8–10] при решении такой же задачи во втором порядке малости, а потому не будем ее приводить в связи с ограниченностью места, а выпишем сразу решение, которое можно найти методом многих масштабов. В безразмерных переменных, в которых $\rho = R = \sigma = 1$, аналитическое выражение для образующей поверхности осциллирующей капли в третьем порядке малости по амплитуде начальной деформации в сферических координатах r и ϑ имеет вид:

$$r(\vartheta, t) = 1 + \varepsilon \sum_{n\in\Omega} M_n^{(1)}(t) P_n(\cos\vartheta)$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_n^{(2)}(t) + \varepsilon M_n^{(3)}(t) \right) P_n(\cos\vartheta); \tag{1}$$

$$M_n^{(1)}(t) = h_n \cos\left(\omega_n t + \varepsilon^2 b_n t\right); \qquad n \in \Omega;$$

$$b_n = \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \sum_{k\in\Omega} \frac{h_k^2 \Xi_n}{2(2k+1)} + \frac{h_n^2\left(2(n-1)\omega_n^2 + \Xi_n\right)}{4(2n+1)} \right.$$

$$- \frac{\chi_{n-1} h_{n-1}^2}{4} \left(\beta^{2(+)}_{n-1,n,1,n-1,n} + \beta^{2(-)}_{n-1,n,1,n-1,n} \right)$$

$$- \frac{\chi_n h_{n+1}^2}{4} \left(\beta^{1(-)}_{n+1,n+1,1,n,n} + \beta^{2(+)}_{n+1,n+1,1,n,n} \right)$$

$$- \sum_{k\in\Omega} \frac{h_k^2}{4} \left[H^{1(-)(+)}_{nkkn} + H^{2(+)(+)}_{knkn} + H^{2(-)(-)}_{knkn} \right.$$

$$\left. \left. + (1 - \delta_{kn}) \left(H^{1(-)(+)}_{kknn} + H^{2(+)(+)}_{kknn} + H^{2(-)(-)}_{nkkn} \right) \right] \right\}; \qquad n \in \Omega;$$

$$M_0^{(2)}(t) = -\sum_{k\in\Omega} \frac{h_k^2 \cos^2(\omega_k t)}{2k+1};$$

$$M_1^{(2)}(t) = \sum_{k\in\Omega} \chi_k h_k h_{k+1} \cos(\omega_k t)\cos(\omega_{k+1} t);$$

$$M_n^{(2)}(t) = \sum_{k,m\in\Omega} \frac{h_k h_m}{2}\Big(\lambda_{kmn}^{(+)} \cos\big((\omega_k+\omega_m)t\big)$$

$$+\lambda_{kmn}^{(-)} \cos\big((\omega_k-\omega_m)t\big) - \big(\lambda_{kmn}^{(+)}+\lambda_{kmn}^{(-)}\big)\cos(\omega_n t)\Big);$$

$$M_0^{(3)}(t) = -\sum_{k\in\Omega} \frac{2M_k^{(2)}}{2k+1}\, h_k \cos(\omega_k t)$$

$$-\sum_{k,m,l\in\Omega} \frac{K_{kml} h_k h_m h_l}{3(2l+1)} \cos(\omega_k t)\cos(\omega_m t)\cos(\omega_l t);$$

$$M_1^{(3)}(t) = -\frac{6}{5} M_1^{(2)}(t) h_2 \cos(\omega_2 t) - 3\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m\in\Omega} K_{km1} M_k^{(2)}(t) h_m \cos(\omega_m t)$$

$$-\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega} K_{kmg} K_{gl1} h_k h_m h_l \cos(\omega_k t)\cos(\omega_m t)\cos(\omega_l t);$$

$$M_n^{(3)}(t) = -\sum_{k\in\Omega} \frac{h_n h_k^2\big(2(n-1)\omega_n\omega_k - \Xi_n\big)}{16(2k+1)\omega_k(\omega_n+\omega_k)}\Big(\cos\big((\omega_n+2\omega_k)t\big) - \cos(\omega_n t)\Big)$$

$$-\sum_{k\in\Omega} \frac{h_n h_k^2\big(2(n-1)\omega_n\omega_k + \Xi_n\big)}{16(2k+1)\omega_k(\omega_n-\omega_k)}\Big(\cos\big((\omega_n-2\omega_k)t\big) - \cos(\omega_n t)\Big)$$

$$+\sum_{k=n-1}^{n+1}\sum_{l\in\Omega} \frac{\chi_l h_k h_l h_{l+1}}{4}\Bigg\{\frac{\beta_{k,l+1,1,l,n}^{1(+)}\big(\cos(\psi_{k,l,l+1}^{(+)(+)} t) - \cos(\omega_n t)\big)}{\big(\omega_n^2 - (\omega_k+\omega_l+\omega_{l+1})^2\big)}$$

$$+\frac{\beta_{k,l+1,1,l,n}^{1(-)}\big(\cos(\psi_{k,l,l+1}^{(+)(-)} t) - \cos(\omega_n t)\big)}{\big(\omega_n^2 - (\omega_k+\omega_l-\omega_{l+1})^2\big)}$$

$$+\frac{\beta_{k,l+1,1,l,n}^{2(+)}\big(\cos(\psi_{k,l,l+1}^{(-)(-)} t) - \cos(\omega_n t)\big)}{\big(\omega_n^2 - (\omega_k-\omega_l-\omega_{l+1})^2\big)}$$

$$+\frac{\beta^{2(-)}_{k,l+1,1,l,n}\big(\cos(\psi^{(+)(-)}_{k,l+1,l}t)-\cos(\omega_n t)\big)}{\big(\omega_n^2-(\omega_k-\omega_l+\omega_{l+1})^2\big)}\Bigg\}$$

$$-\sum_{g=2}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{h_k h_m h_l\big(\lambda^{(+)}_{lmg}+\lambda^{(-)}_{lmg}\big)}{4}\Bigg\{\frac{H^{0(+)}_{kgn}\big(\cos\big((\omega_k+\omega_g)t\big)-\cos(\omega_n t)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_g)^2}$$

$$+\frac{H^{0(-)}_{kgn}\big(\cos\big((\omega_k-\omega_g)t\big)-\cos(\omega_n t)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k-\omega_g)^2}\Bigg\}$$

$$+\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{h_k h_m h_l}{4}\Bigg\{\frac{H^{1(+)(-)}_{kmln}\big(\cos(\psi^{(+)(+)}_{klm}t)-\cos(\omega_n t)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_l+\omega_m)^2}$$

$$+\frac{H^{1(-)(+)}_{kmln}\big(\cos(\psi^{(+)(-)}_{klm}t)-\cos(\omega_n t)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_l-\omega_m)^2}$$

$$+\frac{H^{2(+)(+)}_{kmln}\big(\cos(\psi^{(-)(-)}_{klm}t)-\cos(\omega_n t)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k-\omega_l-\omega_m)^2}$$

$$+\frac{H^{2(-)(-)}_{kmln}\big(\cos(\psi^{(+)(-)}_{kml}t)-\cos(\omega_n t)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k-\omega_l+\omega_m)^2}\Bigg\};$$

$\psi^{(+)(+)}_{kml}=\omega_k+\omega_m+\omega_l;\quad \psi^{(+)(-)}_{kml}=\omega_k+\omega_m-\omega_l;\quad \psi^{(-)(-)}_{kml}=\omega_k-\omega_m-\omega_l;$

ε — малый параметр, характеризующий амплитуду начальной деформации; $P_n(\cos\vartheta)$ — полином Лежандра порядка n; t — время; h_n — константа, определяющая парциальный вклад n-й моды в начальную деформацию равновесной сферической формы капли; Ω — множество номеров мод, определяющих начальную деформацию. Определения коэффициентов, входящих в выписанные соотношения, вынесены в „Приложение“.

2. Из найденного выражения b_n для поправок к частотам ω_n капиллярных осцилляций капли видно, что величины поправок зависят не только от амплитуды начальной деформации n-й моды, но и от амплитуд всех мод, определяющих начальную деформацию.

Из выражений $M_n^{(3)}(t)$ для нелинейных поправок третьего порядка малости к амплитудам возбуждающихся мод несложно видеть, что все они имеют резонансный вид: содержат знаменатели, обращающиеся при определенных условиях в нуль. Все новые по сравнению с квадратичным приближением резонансы соответствуют четырехмодовому взаимодействию капиллярных осцилляций капли, когда частоты резонансно взаимодействующих мод связаны одним из соотношений: $\omega_n \pm \omega_k \pm \omega_m \pm \omega_l = 0$ [11].

Среди множества реализующихся в капле нелинейных резонансов наибольший интерес в связи с проблемой инициирования разряда молнии в грозовом облаке [12] представляют такие, в которых основная мода $(n = 2)$ при докритическом значении собственного заряда (при малых значениях параметра $W = Q^2/(4\pi)$) раскачивается за счет резонансного взаимодействия с высокими модами. Проведенные в [10] исследования нелинейных трехмодовых резонансов, получающихся в расчетах второго порядка малости, показали, что для капли идеальной жидкости основная мода при докритических зарядах не взаимодействует резонансным образом с высокими модами. Иная картина имеет место при четырехмодовом взаимодействии, обнаруживаемом в расчетах третьего порядка малости. Можно показать, что при докритическом для основной моды значении параметра W (точнее, при $W < 4$) и при рассмотрении взаимодействия только первых девяти мод $(2 \leqslant n, m, k, l \leqslant 10)$ только для резонансов вида $\omega_n - \omega_m - \omega_k - \omega_l = 0$ существует 15 резонансных ситуаций, когда основная мода включается в резонансное взаимодействие, а ее амплитуда может расти за счет резонансной перекачки энергии из высоких мод.

3. Заключение. Учет четырехмодового взаимодействия капиллярных осцилляций капли, проявляющегося в третьем порядке приближений по амплитуде многомодовой начальной деформации, позволяет выделить условия резонансной раскачки амплитуды основной моды за счет перекачки энергии из более высоких мод.

Приложение

$$H_{kmln}^{1(+)(-)} = \sum_{g=2}^{\infty} \beta_{kmgln}^{1(+)} \lambda_{lmg}^{(+)} + \sum_{g=1}^{\infty} \mu_{kmgln}^{1(-)} + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(-)};$$

$$H_{kmln}^{1(-)(+)} = \sum_{g=2}^{\infty} \beta_{kmgln}^{1(-)} \lambda_{lmg}^{(-)} + \sum_{g=1}^{\infty} \mu_{kmgln}^{1(+)} + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(+)};$$

$$H_{kmln}^{2(+)(+)} = \sum_{g=2}^{\infty} \beta_{kmgln}^{2(+)} \lambda_{lmg}^{(+)} + \sum_{g=1}^{\infty} \mu_{kmgln}^{1(+)} + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(+)};$$

$$H_{kmln}^{2(-)(-)} = \sum_{g=2}^{\infty} \beta_{kmgln}^{2(-)} \lambda_{lmg}^{(-)} + \sum_{g=1}^{\infty} \mu_{kmgln}^{1(-)} + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(-)};$$

$$H_{kgn}^{0(+)} = \left(\Pi_{kgn}^0 - \Pi_{kgn}^1 \omega_k \omega_g - \Pi_{kgn}^2 \omega_g^2\right);$$

$$H_{kgn}^{0(-)} = \left(\Pi_{kgn}^0 + \Pi_{kgn}^1 \omega_k \omega_g - \Pi_{kgn}^2 \omega_g^2\right);$$

$$\beta_{kmgln}^{1(+)} = \Pi_{kgn}^0 - \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l + \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l + \omega_m)^2;$$

$$\beta_{kmgln}^{1(-)} = \Pi_{kgn}^0 - \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l - \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l - \omega_m)^2;$$

$$\beta_{kmgln}^{2(+)} = \Pi_{kgn}^0 + \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l + \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l + \omega_m)^2;$$

$$\beta_{kmgln}^{2(-)} = \Pi_{kgn}^0 + \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l - \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l - \omega_m)^2;$$

$$\mu_{kmgln}^{1(-)} = \Lambda_{kmgln}^1 - \Gamma_{kmgln}^1 \omega_m \omega_k;$$

$$\mu_{kmgln}^{1(+)} = \Lambda_{kmgln}^1 + \Gamma_{kmgln}^1 \omega_m \omega_k;$$

$$\mu_{kmgln}^{0(-)} = \Lambda_{kmgln}^0 - \Gamma_{kmgln}^0 \omega_m \omega_k;$$

$$\mu_{kmgln}^{0(+)} = \Lambda_{kmgln}^1 + \Gamma_{kmgln}^0 \omega_m \omega_k;$$

$$\Lambda_{kmgln}^0 = \frac{1}{2k}\Bigg\{K_{gln}\Big(\alpha_{kmg}\big(kn(l + 3l^2 - 2(k+2)W\big) + 2(k-2)\omega_k^2\Big)$$

$$+ K_{kmg}\Big(kn\big(4 - 6k(k+1) + \big(k^3 - 2(m+1)(m+2) - k^2(n-9)$$

$$- k\big(3n + 2m(m+3) - 22\big)\big)W\Big) - (k-1)k(k-n-2)\omega_k^2\big)\Big)$$

$$- 2kn\alpha_{kmg} \sum_{\nu=1}^{[l/2]} (2l - 4\nu + 1) K_{g,l-2\nu,n}\Bigg\};$$

$$\Lambda_{kmgln}^1 = \big((g-n-1)K_{gln} - \alpha_{gln}/g\big)\big((m-1)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/m\big)\omega_m^2$$

$$+ Wnk\big((g+1)(l+n-g-2)K_{gln} + \alpha_{gln}\big)K_{kmg};$$

$$\Gamma^0_{kmgln} = \Big((k-1)\big(k-2(n+1)\big)K_{kmg}/2$$

$$-\big((k-1)(m+n)-m\big)\alpha_{kmg}/(km)\Big)K_{gln}$$

$$+\big((k-1)(k-2)K_{klg}/2-(k-2)\alpha_{klg}/k\big)K_{gmn};$$

$$\Gamma^1_{kmgln} = -\big((g-n-1)K_{gkn}-(n+k)\alpha_{gkn}/(kg)\big)$$

$$\times\big((m-1)K_{lmg}-\alpha_{lmg}/m\big)-\big((g-n-1)K_{gln}-\alpha_{gln}/g\big)$$

$$\times\big((m-1)K_{kmg}-\alpha_{kmg}/m\big);$$

$$\Pi^0_{kmn} = K_{kmn}\Big(\omega_k^2(n-k+1)+2kn(k+1)$$

$$+2mn(m+1)-4n+nW\big((n-k-5)(k-1)$$

$$+(m+1)(k+n-m-2)\big)\Big)+\big(\omega_k^2/k+nW\big)\alpha_{kmn};$$

$$\Pi^1_{kmn} = (m+k-n-2)K_{kmn}-(n+k+m)\alpha_{kmn}/(mk);$$

$$K_{mln} = \big(C^{n0}_{m0l0}\big)^2;$$

$$\Pi^2_{kmn} = (m-n-1)K_{kmn}-\alpha_{kmn}/m;$$

$$\chi_k = -9(k+1)/\big((2k+1)(2k+3)\big);$$

$$\Xi_k = \omega_k^2+2k^2(k+1)-4k-5k(k-1)W;$$

$$W = Q^2/(4\pi); \qquad \omega_k^2 = k(k-1)(k+2-W);$$

$$\lambda^{(\pm)}_{mln} = (\gamma_{mln}\pm\omega_m\omega_l\eta_{mln})/\big(\omega_n^2-(\omega_m\pm\omega_l)^2\big);$$

$$\alpha_{mln} = -C^{n0}_{m0l0}C^{n0}_{m(-1)l1}\sqrt{m(m+1)l(l+1)};$$

$$\gamma_{mln} = K_{mln}\Big[\omega_m^2(n-m+1)+2n\big(l(l+1)-1\big)$$

$$+\big(l(m+1)-m(2m-2n+7)+3\big)nW/2\Big]+\alpha_{mln}\big[\omega_m^2/m+nW/2\big];$$

$$\eta_{mln} = K_{mln}(n/2-m+1)+\alpha_{mln}\big(1+n/(2l)\big)/m;$$

C^{n0}_{m0l0}, $C^{n0}_{m,-1,l,1}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [13].

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № 00–15–9925.

Список литературы

[1] *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 519–537.
[2] *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
[3] *Pelekasis N.A., Tsamopolous J.A., Manolis G.D.* // Phys. Fluids. A. 1990. V. 2. N 8. P. 1328–1340.
[4] *Wang T.G., Anilkumar A.V., Lee C.P.* // J. Fluid Mech. 1996. V. 308. P. 1–14.
[5] *Feng Z.* // J. Fluid Mech. 1997. V. 333. P. 1–21.
[6] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 8. С. 45–52.
[7] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 2. С. 27–35.
[8] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ 2001. № 3. С. 173–184.
[9] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. В. 4. С. 15–22.
[10] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 22. С. 45–52.
[11] *Phillps O.M.* // J. Fluid Mech. 1981. V. 106. P. 215–227.
[12] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
[13] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.