01

Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики

© С.Ш. Рехвиашвили

Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик
E-mail: rsergo@mail:ru

Поступило в Редакцию 14 мая 2003 г.
В окончательной редакции 8 июля 2003 г.

С помощью принципа наименьшего действия выведен аналог уравнения Лагранжа с дробной производной по времени. На его основе получено новое уравнение движения. Найдено решение простейшей кинематической задачи, исходя из которого определен „механический смысл“ дробной производной. Предложенный подход может позволить по-новому формулировать различные задачи механики и математической физики.

Во многих областях физики, особенно в задачах, связанных с явлениями переноса во фрактальных средах, возникает понятие дробной производной (см. работы [1–5] и цитированную там литературу). Типичными примерами фрактальных сред являются углеродные нанокомпозиты, структурированные полимеры и различные пористые материалы. В работе [5] Гук рассматривал формализм Лагранжа для уравнения движения частицы во фрактальной среде с дробными производными. Его результат, однако, следует признать ошибочным, поскольку полученное в данной работе уравнение (5) не доставляет минимума функционалу действия, т. е. не удовлетворяет исходной постановке задачи.

Будем рассматривать движение частицы во фрактальной среде. Для этого по аналогии с [3] определим среднюю скорость движения частицы во фрактальной среде:

$$\langle v(t)\rangle = \frac{1}{\tau} D_{0t}^{\alpha-1} v(t) = \frac{1}{\tau} D_{0t}^{\alpha-1} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} D_{0t}^{(\alpha)} x(t), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad (1)$$

где τ — некоторое характерное время процесса, t — безразмерное (отнесенное к τ) время, $v(t)$ — фактическая скорость движения частицы во фрактале, $x(t)$ — координата частицы. D_{st}^{α} означает оператор дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля порядка α[4,6]:

$$D_{st}^{\alpha} g(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{s}^{t} \dfrac{g(t')dt'}{(t-t')^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \operatorname{sign}^{[\alpha]+1}(t-s) \dfrac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} D_{st}^{\alpha-[\alpha]-1} g(t), & \alpha \geqslant 0. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(-\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, $[\alpha]$ — целая часть числа α. $D_{st}^{(\alpha)}$ означает регуляризованную дробную производную порядка α:

$$D_{st}^{(\alpha)} g(t) = D_{st}^{\alpha-1} \frac{dg(t)}{dt}.$$

С учетом определения (1) обобщенный функционал действия записывается в виде

$$S = \int\limits_{0}^{T} L(t, x(t), \langle v(t) \rangle) dt, \tag{2}$$

где T — общее время движения, отнесенное к τ. Пределы интегрирования от 0 до T в (2) выбраны исключительно для простоты записи. Они, как можно убедиться, не меняют дальнейших рассуждений. Пусть $x_0(t)$ есть решение задачи (2), т. е. экстремум функционала существует. Тогда из (2) для кривых сравнения

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon h(t),$$

$$h(0) = h(T) = 0$$

(ε — малый параметр) имеем

$$S = \int\limits_{0}^{T} L\Big(t, x_0(t) + \varepsilon h(t),\ \frac{1}{\tau} D_{0t}^{(\alpha)} x(t) + \frac{\varepsilon}{\tau} D_{0t}^{(\alpha)} h(t)\Big) dt. \tag{3}$$

Таким образом получаем, что функционал действия S есть функция только одного параметра ε. В силу предположения о том, что $x_0(t)$ есть решение, должно выполняться условие $\delta S = 0$, где δ — символ неполной изохронной вариации. Данное условие выражает известный принцип наименьшего действия. Используя выражение (3), вычислим первую вариацию функционала

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_0^T \left(\frac{dL}{d\varepsilon}\right) dt = \int_0^T \left(\frac{dL}{dx} - \frac{1}{\tau} D_{Tt}^{(\alpha)} \frac{dL}{d\langle v\rangle}\right) h(t)dt, \tag{4}$$

где $\langle v\rangle$ определяется в выражении (1), $D_{Tt}^{(\alpha)}$ — регуляризованная дробная производная порядка α, вычисленная на интервале от T до t. Приравнивая выражение (4) к нулю, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dL}{dx} - \frac{1}{\tau} D_{Tt}^{(\alpha)} \frac{dL}{d\langle v\rangle} = 0. \tag{5}$$

Легко убедиться, что обычное уравнение Лагранжа является частным случаем уравнения (5) и точно следует из него при $\alpha = 1$.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения движения. Для этого необходимо определить функцию L. Из исходной постановки задачи следует, что эта функция должна зависеть от $\langle v\rangle$. Поскольку евклидово пространство, в которое вложен фрактал, является однородным и изотропным, то функция L должна быть скалярной и в явном виде не зависеть от времени. Это означает, что функцию L можно разложить в ряд по четным степеням $\langle v\rangle$. С точностью до второго члена разложения имеем

$$L = -U(x) + \frac{m}{2}\langle v\rangle^2. \tag{6}$$

Коэффициенты разложения m и $U(x)$ не зависят от порядка дробной производной, определяющей скорость $\langle v\rangle$, поэтому их нет оснований считать отличными от обычных массы частицы и потенциальной энергии. Подставляя (6) в (5), получаем уравнение для неизвестной функции $x(t)$:

$$\frac{m}{\tau^2} D_{Tt}^{(\alpha)} D_{0t}^{(\alpha)} x(t) = -\frac{dU(x)}{dx}. \tag{7}$$

Как и следовало ожидать, при $\alpha = 1$ из (7) получается классическое уравнение движения. При этом выражение в правой части (7) определяет консервативную силу, действующую на частицу. Следует отметить, что в научной литературе вместо уравнения (7) часто используется дробное уравнение движения, которое получается формальной заменой простой производной на дробную. Однако с физической точки зрения такая замена совершенно необоснованна: во-первых, полученное уравнение не удовлетворяет принципу наименьшего действия; во-вторых, из него не следует принцип относительности. К сожалению, эти факты до сих пор остаются без внимания.

Чтобы определить физический смысл левой части уравнения (7), рассмотрим простейший случай, соответствующий свободному движению. Уравнение (7) в данном случае переписывается в виде

$$D_{Tt}^{(\alpha)} D_{0t}^{(\alpha)} x(t) = 0. \tag{8}$$

Запишем уравнение (8) через дробные производные Римана–Лиувилля

$$D_{Tt}^{\alpha-1} \frac{d}{dt} \left\{ D_{0t}^{\alpha-1} \frac{dx(t)}{dt} \right\} = 0. \tag{9}$$

Действуя на уравнение (9) оператором $D_{Tt}^{1-\alpha}$ с последующим интегрированием по t, получаем

$$D_{0t}^{\alpha-1} \frac{dx(t)}{dt} = \text{const}. \tag{10}$$

Действуя на уравнение (10) оператором $D_{0t}^{1-\alpha}$, а затем интегрируя по t с учетом граничных условий, получаем окончательное решение

$$x(t) = x(0) + \frac{x(T) - x(0)}{T^{\alpha}} t^{\alpha}. \tag{11}$$

Из (11) видно, что в отсутствие консервативных сил при изменении показателя α от 1 до 0 происходит смена равномерного прямолинейного движения полной остановкой (при $\alpha = 1$ получаем выражение для траектории равномерного движения: $x(t) = x(0) + v_0 t$, где $v_0 = \big(x(T) - x(0)\big)/T$, а при $\alpha = 0$ движение прекращается в точке $x(T)$). Это означает, что движение, сопровождающееся изменением показателя α, происходит в некоторой „диссипативной среде“. К этому же выводу, очевидно, можно прийти, рассматривая и другие простые виды движения. Кроме того, можно заметить, что уравнение (7) при $\alpha < 1$ не является симметричным относительно замены знака времени, что также свидетельствует о диссипативном (необратимом) характере движения. Иногда говорят, что такое движение происходит с потерей памяти. Что касается степенного множителя t^{α} в (11), то он характерен для многих динамических фракталов и часто возникает в различных физических характеристиках кинетических процессов во фрактальных средах. Так, например, полученное выражение (11) по форме полностью совпадает с известным законом Херста, найденным экспериментальным путем при измерении притока и оттока озерной воды [7].

Таким образом, применение дробной производной траектории по времени при формулировке принципа наименьшего действия позволяет de facto учесть процессы диссипации в механической системе. Представляет значительный (как физический, так и математический) интерес с помощью уравнения (7) исследовать различные задачи механики и математической физики.

Автор благодарит А.В. Псху за основательное обсуждение данной работы.

Список литературы

[1] *Кочубей А.Н.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 1359–1368.
[2] *Саичев А.И., Уткин С.Г.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. № 7. С. 1–6.
[3] *Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков-Лафишев М.Х.* // Докл. НАН Украины. 1997. № 12. С. 47–54.
[4] *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000.
[5] *Гук И.П.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. В. 4. С. 7–11.
[6] *Самко С.Г, Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
[7] *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.