

01

## Восстановление уравнений систем с запаздыванием под внешним воздействием по временным рядам

© М.Д. Прохоров, В.И. Пономаренко, А.С. Караваев

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: sbire@sgu.ru

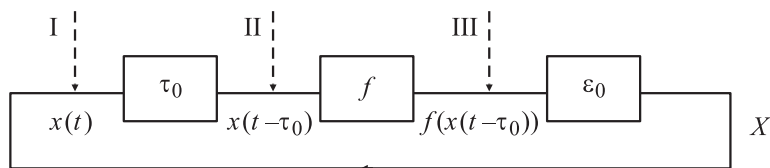
Поступило в Редакцию 2 июля 2003 г.

Предложен метод восстановления по временным рядам уравнений систем с запаздывающей обратной связью, находящихся под внешним воздействием. Работоспособность метода продемонстрирована на примерах коротких зашумленных временных рядов при различных видах внешнего воздействия.

1. Задача реконструкции по временным рядам нелинейных динамических моделей систем с запаздывающей обратной связью привлекает к себе в последние годы большое внимание [1–9]. Актуальность данной задачи обусловлена широким распространением систем с запаздыванием в природе. Обычно эти системы, поведение которых определяется не только текущим состоянием, но и состояниями в предыдущие моменты времени, моделируются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Такие модели успешно применяются во многих разделах физики, биологии, физиологии и химии. Однако восстановление модельных уравнений систем с запаздыванием по временным рядам в случае, когда эти системы находятся под воздействием других систем, до сих пор остается малоисследованным. Вместе с тем такая ситуация типична для многих практически важных задач. В данной работе мы развиваем предложенные нами ранее методы реконструкции систем с запаздывающей обратной связью по их хаотическим временным реализациям [6–8] на случай систем с запаздыванием, на которые действуют другие системы.

2. Рассмотрим систему с запаздыванием  $X$ , описываемую в отсутствие внешнего воздействия дифференциальным уравнением первого порядка с запаздыванием следующего вида:

$$\varepsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0)), \quad (1)$$



**Рис. 1.** Блок-схема системы  $X$  с запаздывающей обратной связью. Элементы, обозначенные  $\tau_0$ ,  $f$  и  $\varepsilon_0$ , обеспечивают соответственно задержку, нелинейное и инерционное преобразование колебаний в системе. Римскими цифрами I–III отмечены точки, в которых внешнее воздействие системы  $Y$  может подаваться на систему  $X$ .

где  $x(t)$  — состояние системы в момент времени  $t$ ,  $f$  — нелинейная функция,  $\tau_0$  — время запаздывания,  $\varepsilon_0$  — параметр, характеризующий инерционность системы. В общем случае уравнение (1) является математической моделью колебательной системы, представляемой кольцом из трех идеализированных элементов: нелинейного, инерционного и задержки. На рис. 1 эти элементы обозначены для кольцевой системы  $X$  соответственно  $f$ ,  $\varepsilon_0$  и  $\tau_0$ . Пусть на систему  $X$  действует система  $Y$ . Воздействие  $Y$  на  $X$  может быть реализовано различными способами. Выделим 3 способа связи, при которых переменная системы  $Y$  вводится с некоторым коэффициентом в различные точки кольцевой системы  $X$ , обозначенные на рис. 1 римскими цифрами I–III. В зависимости от точки, в которой система  $Y$  воздействует на систему  $X$ , динамика последней описывается одним из следующих уравнений

$$\text{I: } \varepsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0) + k_y y(t - \tau_0)), \quad (2)$$

$$\text{II: } \varepsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0) + k_y y(t)), \quad (3)$$

$$\text{III: } \varepsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0)) + k_y y(t), \quad (4)$$

где  $y(t)$  — состояние системы  $Y$  в момент времени  $t$ , а  $k_y$  — коэффициент связи, характеризующий величину воздействия  $Y$  на  $X$ .

Предлагаемый нами метод позволяет по временным реализациям колебаний в системах  $X$  и  $Y$  восстановить систему с запаздыванием  $X$ , определить тип связи (различить ситуации, описываемые уравнениями (2)–(4)) и ее величину. Для восстановления по наблюдаемой реализации  $x(t)$  времени задержки  $\tau_0$  воспользуемся методом,

предложенным нами в [6], где было показано, что во временной реализации систем с запаздыванием вида (1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на  $\tau_0$ . Тогда на нахождения  $\tau_0$  нужно выделить экстремумы в исходной реализации, а затем для различных значений времени  $\tau$  определить число  $N$  пар экстремумов во временной реализации, удаленных друг от друга на  $\tau$ , и построить зависимость  $N(\tau)$ . Значению времени запаздывания  $\tau_0$  соответствует положение абсолютного минимума  $N(\tau)$ . Исследования показывают, что такой метод определения времени задержки может быть успешно применен и в том случае, если на систему  $X$  действует система  $Y$ , при условии, что внешнее воздействие не приводит к появлению большого числа дополнительных экстремумов во временной реализации колебаний системы  $X$ .

Для определения параметра  $\varepsilon_0$  и функции  $f$  системы  $X$ , а также коэффициента связи  $k_y$  мы предлагаем метод, использующий временные реализации обеих наблюдаемых переменных  $x(t)$  и  $y(t)$ . Предположим сначала, что нам известен способ воздействия  $Y$  на  $X$ , т.е. известна структура уравнения, описывающего динамику системы с запаздыванием под внешним воздействием. В качестве примера рассмотрим случай I, описываемый уравнением (2), при котором переменная системы  $Y$  вводится в кольцо обратной связи системы  $X$  после инерционного элемента. Из уравнения (2) следует, что если построить на плоскости множество точек с координатами  $(x(t - \tau_0) + k_y y(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$ , то оно воспроизведет функцию  $f$ . Поскольку заранее величины  $\varepsilon_0$  и  $k_y$  неизвестны, будем строить зависимости  $\varepsilon \dot{x}(t) + x(t)$  от  $x(t - \tau_0) + k_y y(t - \tau_0)$  для различных значений  $\varepsilon$  и  $k$ , добываясь однозначной зависимости на плоскости  $(x(t - \tau_0) + k_y y(t - \tau_0), \varepsilon \dot{x}(t) + x(t))$ , которая возможна лишь при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $k = k_y$ . В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске  $\varepsilon_0$  и  $k_y$  будем использовать минимальную длину линии  $L(\varepsilon, k)$ , соединяющей точки на этой плоскости, упорядоченные по величине абсциссы. Минимум  $L(\varepsilon, k)$  будет наблюдаться при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $k = k_y$ , а построенная при этих значениях зависимость  $\varepsilon \dot{x}(t) + x(t)$  от  $x(t - \tau_0) + k_y y(t - \tau_0)$  воспроизведет нелинейную функцию, которую при необходимости можно аппроксимировать. Предлагаемый подход использует все точки временных рядов, что позволяет по коротким реализациям восстанавливать параметры и нелинейную функцию.

Аналогичным образом можно восстановить нелинейную функцию  $f$  и параметры  $\varepsilon_0$  и  $k_y$  систем, описываемых уравнениями (3) и (4),

строю соответственно зависимости  $\varepsilon \dot{x}(t) + x(t)$  от  $x(t - \tau_0) + ky(t)$  и  $\varepsilon \dot{x}(t) + x(t) - ky(t)$  от  $x(t - \tau_0)$  для различных значений  $\varepsilon$  и  $k$ . Если нам априорно неизвестно, в какой именно точке, I, II или III, осуществляется воздействие  $Y$  на  $X$ , нужно провести реконструкцию каждого из трех модельных уравнений (2)–(4). В этом случае на единственно правильную из трех возможных структур модельного уравнения укажет однозначность восстановленной нелинейной функции, и, следовательно, наиболее низкое из трех полученных значений  $L_{\min}(\varepsilon, k)$ . Таким образом, метод позволяет не только восстановить по временным рядам параметры системы с запаздыванием под внешним воздействием, но и определить вид модельного уравнения.

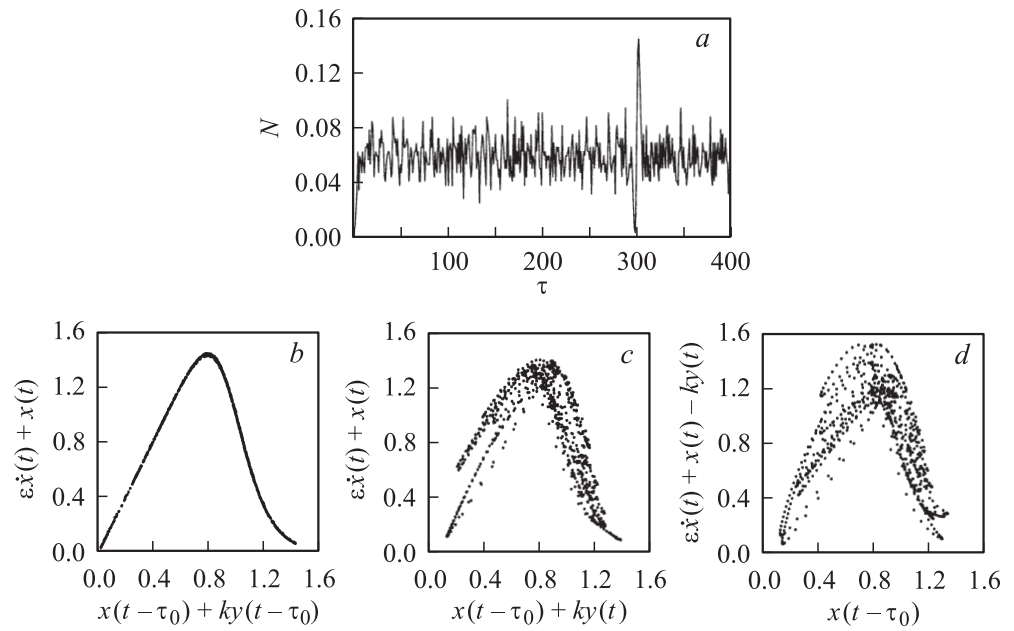
3. Работоспособность метода продемонстрирована нами для случаев, когда система с запаздыванием  $X$  описывается уравнением Маккея–Гласса

$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{ax(t - \tau_0)}{1 + x^c(t - \tau_0)}, \quad (5)$$

а внешнее воздействие системы  $Y$  является гармоническим или хаотическим. Уравнение (5) может быть приведено к виду (1) с  $\varepsilon_0 = 1/b$  и  $f(x(t - \tau_0)) = ax(t - \tau_0)/b(1 + x^c(t - \tau_0))$ .

На рис. 2 приведены результаты восстановления системы Маккея–Гласса в хаотическом режиме ( $a = 0.2$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 10$ ,  $\tau_0 = 300$ ), на которую действует система  $Y$ , совершающая синусоидальные колебания вида  $y(t) = A \sin \omega t$ . Амплитуда колебаний системы  $y$ ,  $A = 1$ , близка к амплитуде собственных колебаний системы (5), период колебаний  $T = 2\pi/\omega = 130$ . Способ связи  $Y$  и  $X$  соответствует случаю I, описываемому уравнением (2). Коэффициент связи  $k_y = 0.1$ . Для построения зависимости  $N(\tau)$  (рис. 2, а) мы использовали 5000 точек реализации  $x(t)$ . Производная  $\dot{x}(t)$  оценивалась по временному ряду с помощью локальной параболической аппроксимации. Положение минимума  $N(\tau)$  позволяет точно восстановить время запаздывания  $\tau_0 = 300$ .

Графики, представленные на рис. 2, б–д, иллюстрируют результаты восстановления нелинейной функции при значениях  $\varepsilon$  и  $k$ , соответствующих минимальной длине линии  $L(\varepsilon, k)$ , при выборе модельного уравнения в виде уравнения (2), (3) или (4) соответственно. Для построения этих графиков использовано лишь по 1000 точек реализации  $x(t)$  и  $y(t)$ . При поиске  $L_{\min}(\varepsilon, k)$  шаг изменения  $\varepsilon$  был 0.1 ( $\varepsilon_0 = 1/b = 10$ ), а шаг изменения  $k$  был 0.01. При восстановлении модели в виде уравнения (2) минимальная длина линии  $L(\varepsilon, k)$ , нормированная на

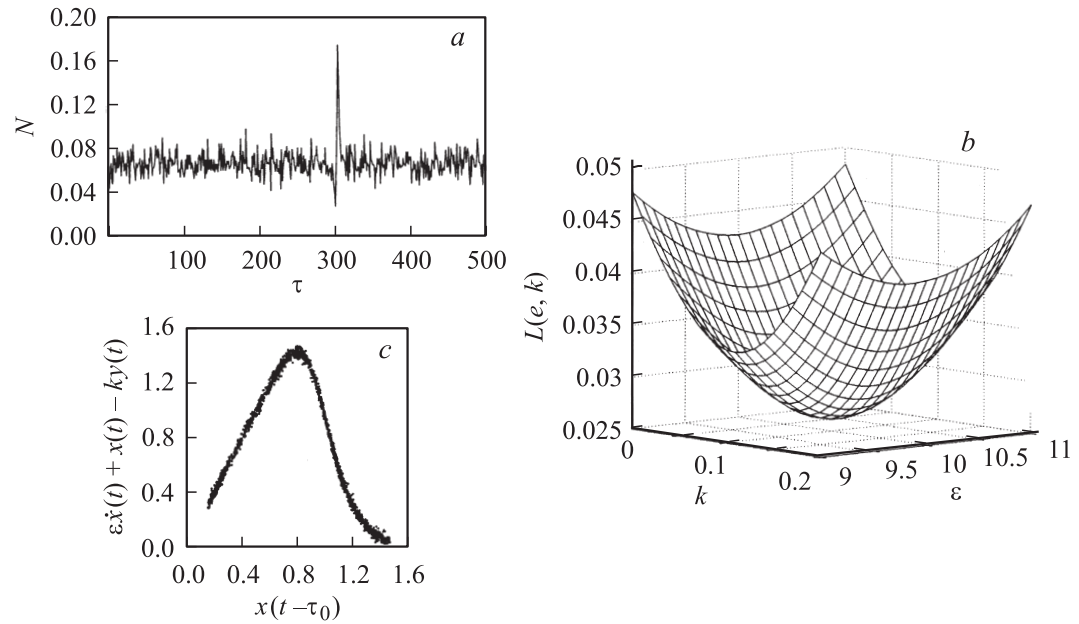


**Рис. 2.** Восстановление системы Маккея–Гласса, находящейся под гармоническим воздействием:  $a$  — число  $N$  пар экстремумов временного ряда системы  $X$  на удалении  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов,  $N_{\min}(\tau) = N(300)$ ;  $b-d$  — результаты восстановления нелинейной функции при выборе модельного уравнения в виде (2)–(4) соответственно и восстановленных параметрах  $\varepsilon = 10.1$ ,  $k = 0.10$  ( $b$ ),  $\varepsilon = 7.4$ ,  $k = -0.05$  ( $c$ ),  $\varepsilon = 7.3$ ,  $k = -0.06$  ( $d$ ).

число точек на графике,  $L_{\min}(\varepsilon, k) = L(10.1, 0.10) = 0.007$ . При выборе в качестве модели уравнения (3):  $L_{\min}(\varepsilon, k) = L(7.4, -0.05) = 0.153$ , а при восстановлении модели в виде (4):  $L_{\min}(\varepsilon, k) = L(7.3, 0.06) = 0.147$ . Из трех графиков лишь один (рис. 2, *b*) демонстрирует близкую к однозначной зависимость, а соответствующее ему значение  $L_{\min}(\varepsilon, k)$  существенно меньше, чем в двух других случаях. Это указывает на то, что модельное уравнение имеет вид (2), параметры  $\varepsilon_0$  и  $k_y$  которого восстановлены с хорошей точностью.

При указанных выше параметрах систем  $X$  и  $Y$  метод позволяет определить вид модельного уравнения и реконструировать систему  $X$  при  $0.01 \leq |k_y| \leq 0.5$ . По сравнению с другими методами определения связи между системами по временным рядам [10,11] предложенная нами процедура имеет ряд преимуществ. В отличие от индексов направленности [11] она применима к синхронизированным системам и позволяет определять величину связи, а не только ее направление, даже в случае связи принципиально различных систем. Для оценки возможностей метода при наличии возмущений мы применили его к зашумленным данным. Метод оказывается более критичным к шуму в системе с запаздыванием. Он еще остается работоспособным при уровнях шума в системе  $X$  порядка 10%. Уровень шума в системе  $Y$  может быть при этом в несколько раз выше.

Мы рассмотрели также случай, когда система  $Y$ , действующая на систему  $X$ , является, так же как и  $X$ , системой с запаздыванием. На рис. 3 приведены результаты восстановления системы Маккея–Гласса при  $A = 0.2$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 10$ ,  $\tau_0 = 300$ , на которую действует другая система Маккея–Гласса при тех же значениях  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $\tau_0 = 400$ . Способ связи  $Y$  и  $X$  соответствует случаю III, описываемому уравнением (4). Коэффициент связи  $k_y = 0.1$ . На обе системы  $X$  и  $Y$  действует гауссовский белый шум с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением, составляющим 10% от среднеквадратичного отклонения рядов без шума. Несмотря на присутствие шума, зависимость  $N(\tau)$  (рис. 3, *a*) позволяет точно восстановить время запаздывания, а зависимость  $L(\varepsilon, k)$  (рис. 3, *b*) — восстановить параметры  $\varepsilon_0$  и  $k_y$ . График  $L(\varepsilon, k)$  построен по 2000 точек реализации  $x(t)$  и  $y(t)$  при шаге изменения  $\varepsilon$ , равном 0.1, и шаге изменения  $k$ , равном 0.01. Наличие шума приводит к заметному ухудшению качества восстановления нелинейной функции (рис. 3, *c*). При выборе в качестве модели уравнения (2):  $L_{\min}(\varepsilon, k) = L(10.1, 0.01) = 0.042$ , а при реконструкции модели в виде (3):  $L_{\min}(\varepsilon, k) = L(10.0, -0.02) = 0.039$ . Это указывает



**Рис. 3.** Восстановление системы Маккея–Гласса, находящейся под воздействием другой системы Маккея–Гласса в присутствии шума:  $a$  — число  $N$  пар экстремумов временного ряда системы  $X$  на удалении  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов,  $n_{\min}(\tau) = N(300)$ ;  $b$  — зависимость  $L(\epsilon, k)$  при выборе модельного уравнения в виде (4), нормированная на число точек;  $L_{\min}(\epsilon, k) = L(10.0, 0.10) = 0.026$ ;  $c$  — восстановленная нелинейная функция при  $\epsilon = 10$ ,  $k = 0.1$ .

на то, что модельное уравнение имеет вид (4), так как в этом случае получаем наименьшее значение  $L_{\min}(\varepsilon, k) = L(10.0, 0.10) = 0.026$ .

4. Нами предложен метод восстановления по временным рядам систем с запаздыванием, находящихся под внешним воздействием. Работоспособность метода проиллюстрирована на примере различных видов внешнего воздействия и различных способов его внесения в систему с запаздывающей обратной связью. Метод может быть успешно применен для анализа коротких временных рядов при достаточно высоких уровнях шума.

Выражаем признательность Б.П. Безручко за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 03-02-17593, CRDF, Award No. REC-006, и фонда некоммерческих программ „Династия“ и МЦФФМ, грант № 245 662.

## Список литературы

- [1] *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th.* et al. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3082–3085.
- [2] *Voss H., Kurths J.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 336–344.
- [3] *Ellner S.P., Kendall B.E., Wood S.N.* et al. // Physica D. 1997. V. 110. P. 182–194.
- [4] *Hegger R., Bünner M.J., Kantz H.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 558–561.
- [5] *Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A.* et al. // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 165–176.
- [6] *Караваев А.С., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 10. С. 43–51.
- [7] *Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056216.
- [8] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 16. С. 37–44.
- [9] *Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L.* et al. // Phys. Lett. A. 2003. V. 308. P. 54–60.
- [10] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 045202.
- [11] *Rosenblum M.G., Cimponeriu L., Bezerianos A.* et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 041909.