01;05.4

Модуляционная неустойчивость диспергирующих электромагнитных волн в джозефсоновском переходе с нелокальным взаимодействием

© *А.И. Ломтев*

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины
E-mail:lomtev@kinetic.ac.donetsk.ua

В окончательной редакции 18 августа 2003 г.

Исследована модуляционная неустойчивость диспергирующих электромагнитных волн, распространяющихся в джозефсоновском переходе, состоящем из массивных сверхпроводников. Получено дисперсионное уравнение для инкремента нарастания малых амплитудных возмущений. Выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость в длинноволновой области $0 \leqslant \mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k})$. Показано существование возможности управления областью модуляционной неустойчивости $\mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k}) < \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{B2}(\mathbf{k}, A, L)$ дисперсионным параметром k — волновым вектором (или частотой $\omega(\mathbf{k})$) несущей волны линейного приближения.

До настоящего времени не ослабевает интерес к исследованию широкого круга явлений неустойчивости волн в различных нелинейных системах и средах [1,2]. Известно, что сжатие нелинейной волны может происходить как в поперечном, так и в продольном направлении по отношению к направлению распространения волны. В качестве примеров можно привести самофокусировку света, предсказанную Аскарьяном [3,4], неустойчивость типа разбиения волны на пакеты и самосжатия волновых пакетов — модуляционную неустойчивость, которая была впервые изучена Лайтхиллом [5].

Модуляционная неустойчивость электромагнитных волн в распределенных джозефсоновских переходах описывается неустойчивостью решений уравнения sine-Gordon. Во многих ситуациях при исследовании модуляционной неустойчивости необходимо рассматривать пространственно-нелокальные модификации уравнения sine-Gordon [6,7]. Пространственная нелокальность уравнений для разности фаз возникает вследствие нелокальной связи магнитного поля на границе раздела и в сверхпроводнике. Такая причина пространственной нелокальности является универсальной для электродинамики джозефсоновских контактов.

Модуляционная неустойчивость в рамках пространственно-нелокальной джозефсоновской электродинамики контакта из массивных сверхпроводников толщиной d, много большей лондоновской глубины проникновения λ, впервые рассмотрена в работе [6]. В этой работе рассмотрение проведено на основе приближенной системы уравнений для возмущений комплексной амплитуды (вещественных возмущений амплитуды и фазы), вытекающей из разложения спектра диспергирующих волн линейного приближения по малым возмущениям частоты и волнового вектора. Показано, что процесс нарастания малых возмущений как амплитуды, так и фазы отвечает развитию модуляционной неустойчивости электромагнитной волны конечной постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты и с законом дисперсии волн линейного приближения. Выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость в промежуточной и коротковолновой областях волновых векторов возмущений.

В работе [8] для джозефсоновского перехода также из массивных сверхпроводников толщиной $d \gg \lambda$ исследована модуляционная неустойчивость осциллирующей с джозефсоновской частотой однородной (недиспергирующей) плоской нелинейной электромагнитной волны постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты, обусловленная нарастанием лишь малых амплитудных возмущений и приводящая к разбиению такой волны на пакеты.

Как в работе [6], так и в работе [8] область модуляционной неустойчивости для возмущений с волновым вектором $\mathbf{Q}$ имеет вид $0 < \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_B$, где $\mathbf{Q}_B$ — некоторый пограничный волновой вектор. Поэтому длинноволновая область волновых векторов возмущений $\mathbf{Q} \to 0$ всегда являлась неустойчивой.

Как будет показано ниже, пространственная нелокальность уравнения джозефсоновской электродинамики для волн с дисперсией оказывает стабилизирующее влияние на развитие модуляционной неустойчивости относительно нарастания лишь малых амплитудных возмущений именно в длинноволновой области $0 \leqslant \mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k})$.

В джозефсоновском переходе, состоящем из массивных сверхпроводников с толщиной $d \gg \lambda$, динамика разности фаз $\varphi(x,t)$ в бездиссипативном пределе описывается нелинейным, пространственно-нелокальным уравнением sine-Gordon [6,7]

$$\frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2}+\sin\varphi(x,t)=\frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_0\left(\frac{|x-x'|}{\lambda}\right)\frac{\partial^2\varphi(x',t)}{\partial x'^2}\,dx', \quad (1)$$

где ω_J и λ_J — джозефсоновские частота и длина соответственно, $K_0(x)$ — функция Макдональда нулевого порядка. Очевидно, что при величине $\lambda \to 0$ это уравнение переходит в общеизвестное локальное уравнение sine-Gordon [9,10].

В линейном приближении, когда $\sin\varphi(x,t) \approx \varphi(x,t)$, уравнение (1) описывает малоамплитудные диспергирующие электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль перехода

$$\varphi(x,t)=\varphi_0\exp\bigl[i(\mathbf{k}x-\omega t)\bigr], \quad |\varphi_0| \ll 1, \quad (2)$$

волновой вектор $\mathbf{k}$ и частота ω которых связаны дисперсионным соотношением

$$\omega^2(\mathbf{k})=\omega_J^2+v_S^2\mathbf{k}^2/(1+\lambda^2\mathbf{k}^2)^{1/2}, \quad (3)$$

где $v_S=\lambda_J\omega_J$ — скорость волны Свихарта.

Рассмотрим эволюцию нелинейных диспергирующих электромагнитных волн малой, но конечной амплитуды в переходе. Представим разность фаз $\varphi(x,t)$ в виде

$$\varphi(x,t)=u(x,t)\exp\bigl\{i[\mathbf{k}x-\omega(\mathbf{k})t]\bigr\}+u^*(x,t)\exp\bigl\{-i[\mathbf{k}x-\omega(\mathbf{k})t]\bigr\},$$

$$|u(x,t)| \ll 1. \quad (4)$$

Аппроксимируя $\sin\varphi(x,t) \approx \varphi(x,t)-\varphi^3(x,t)/3!$ [11], учтем в уравнении (1) нижайший порядок нелинейности на фазе основной несущей гармоники и ограничимся приближением медленно меняющейся во времени амплитуды $u(x,t)$, когда справедливо неравенство $|\partial^2u(x,t)/\partial t^2| \ll 2\omega(\mathbf{k})|\partial u(x,t)|/\partial t|$. Тогда из уравнения (1) при подстановке в него поля (4) для амплитуды $u(x,t)$ получаем следующее уравнение

$$i2\omega(\mathbf{k})\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \left[\omega^2(\mathbf{k}) - \omega_J^2 + \frac{\omega_J^2}{2}|u(x,t)|^2\right]u(x,t)$$

$$+ \frac{v_S^2}{\pi\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0\left(\frac{|x-x'|}{\lambda}\right)\left[\frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial x'^2} + i2\mathbf{k}\frac{\partial u(x',t)}{\partial x'}\right.$$

$$\left. - \mathbf{k}^2 u(x',t)\right]\exp\big[-i\mathbf{k}(x-x')\big]dx' = 0. \qquad (5)$$

Это нелинейное нелокальное уравнение имеет точное решение вида нелинейной плоской однородной волны постоянной амплитуды A с нелинейным сдвигом частоты

$$u_0(t) = A\exp\big[i\omega_J^2 A^2 t/4\omega(\mathbf{k})\big], \quad A \ll 1. \qquad (6)$$

Исследуем устойчивость такого решения. О характере распада плоской волны (6) можно судить по развитию ее малых возмущений. С этой целью допустим, что случайно возникло малое возмущение амплитуды

$$u(x,t) = \big[A + \psi(x,t)\big]\exp\big[i\omega_J^2 A^2 t/4\omega(\mathbf{k})\big], \quad |\psi(x,t)| \ll A. \qquad (7)$$

Из уравнения (5) для малого возмущения $\psi(x,t)$ следует линейное уравнение

$$i\frac{2\omega(\mathbf{k})}{\omega_J^2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \left[\frac{\omega^2(\mathbf{k})}{\omega_J^2} - 1\right]\psi(x,t) + \frac{A^2}{2}\big[\psi(x,t) + \psi^*(x,t)\big]$$

$$+ \frac{\lambda_j^2}{\pi\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0\left(\frac{|x-x'|}{\lambda}\right)\left[\frac{\partial^2\psi(x',t)}{\partial x'^2} + i2\mathbf{k}\frac{\partial\psi(x',t)}{\partial x'}\right.$$

$$\left. - \mathbf{k}^2\psi(x',t)\right]\exp\big[-i\mathbf{k}(x-x')\big]dx' = 0. \qquad (8)$$

Полагая в уравнении (8) $\psi(x,t) = v(x,t) + iw(x,t)$, для действительной и мнимой частей возмущения получаем систему двух связанных уравнений.

Для амплитудных возмущений вида (произвольные возмущения можно представить как суперпозицию таких полей)

$$\begin{aligned} v(x,t) &= V(\mathbf{Q},\Omega)\exp\big[i(\mathbf{Q}x-\Omega t)\big],\\ w(x,t) &= W(\mathbf{Q},\Omega)\exp\big[i(\mathbf{Q}x-\Omega t)\big], \end{aligned} \tag{9}$$

распространяющихся вдоль перехода Джозефсона с волновым вектором $\mathbf{Q}$ и частотой Ω, из системы уравнений следует дисперсионное соотношение $\Omega = \Omega(\mathbf{Q})$:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(\mathbf{Q})}{\omega_J} &= \frac{\omega_J\lambda_J^2\mathbf{kQ}}{\omega(\mathbf{k})\sqrt{1+\lambda^2(\mathbf{k}+\mathbf{Q})^2}}\\ &\pm \frac{\omega_J}{2\omega(\mathbf{k})}\left[\frac{\omega^2(\mathbf{k}+\mathbf{Q})}{\omega_J^2} - \frac{\omega^2(\mathbf{k})}{\omega_J^2} - \frac{2\lambda_J^2\mathbf{kQ}}{\sqrt{1+\lambda^2(\mathbf{k}+\mathbf{Q})^2}}\right]^{1/2}\\ &\times \left[\frac{\omega^2(\mathbf{k}+\mathbf{Q})}{\omega_J^2} - \frac{\omega^2(\mathbf{k})}{\omega_J^2} - \frac{2\lambda_J^2\mathbf{kQ}}{\sqrt{1+\lambda^2(\mathbf{k}+\mathbf{Q})^2}} - A^2\right]^{1/2}, \end{aligned} \tag{10}$$

определяющее инкремент нарастания $\gamma(\mathbf{Q}) = \mathrm{Im}\Omega(\mathbf{Q})$, где $\omega(\mathbf{k})$ задается формулой (3).

Согласно выражению (10), которое всегда имеет решение $\Omega(\mathbf{Q}) = \mathrm{Re}\Omega(\mathbf{Q}) + i\mathrm{Im}\Omega(\mathbf{Q})$ с положительной мнимой частью, амплитудные возмущения (9) с волновым числом $\mathbf{Q}$ будут нарастать с инкрементом $\gamma(\mathbf{Q})$. Процесс нарастания малых возмущений амплитуды отвечает развитию модуляционной неустойчивости волны постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты (6) и с законом дисперсии волн линейного приближения (3). Заметим, что инкремент нарастания $\gamma(\mathbf{Q})$ из дисперсионного соотношения (10) определяется не $\partial^2\omega(\mathbf{k})/\partial\mathbf{k}^2$, как в работе [6], а непосредственно спектром $\omega(\mathbf{k})$ волн линейного приближения (3).

Для волн без дисперсии при величине $\mathbf{k} = 0$ из дисперсионного уравнения (10) следуют все результаты работы [8].

В локальном пределе при выполнении неравенств $\lambda_J^2/\lambda \gg \lambda_J \gg \lambda$, когда несущественна пространственная нелокальность уравнения для разности фаз (1) (которое при $\lambda \to 0$ переходит в обычное уравнение sine-Gordon), дисперсионное уравнение (10) приобретает вид

$$\frac{\Omega(\mathbf{Q})}{\omega_J} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_J^2\mathbf{k}^2}}\left[\lambda_J^2\mathbf{k}\mathbf{Q} \pm i\,\frac{\lambda_J\mathbf{Q}}{2}\,(A^2-\lambda_J^2\mathbf{Q}^2)^{1/2}\right]. \tag{11}$$

Из (11) следует, что волны с любым волновым числом $\mathbf{k}$ неустойчивы по отношению к возмущениям их амплитуды с волновым вектором $0 < \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_B = A/\lambda_J$. Максимальное значение инкремента нарастания равно $\gamma_{\max}(\mathbf{Q}_m)/\omega_J = A^2/4(1+\lambda_J^2\mathbf{k}^2)^{1/2}$ и достигается при значении волнового вектора $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_m = A/\sqrt{2}\,\lambda_J$.

В пространственно-сильнонелокальном пределе при конечной глубине проникновения поля в сверхпроводник λ и при выполнении неравенств $\lambda_J^2/\lambda \ll \lambda_J \ll \lambda$, $\mathbf{k}\lambda \gg 1$ дисперсионное уравнение (10) имеет вид

$$\frac{\Omega(\mathbf{Q})}{\omega_J} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_J^2\mathbf{k}/\lambda}}\left\{\frac{\lambda_J^2\mathbf{k}\mathbf{Q}}{\lambda(\mathbf{k}+\mathbf{Q})}\right.$$

$$\left.\pm\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_J^2\mathbf{Q}(\mathbf{Q}-\mathbf{k})}{\lambda(\mathbf{Q}+\mathbf{k})}\right]^{1/2}\left[\frac{\lambda_J^2\mathbf{Q}(\mathbf{Q}-\mathbf{k})}{\lambda(\mathbf{Q}+\mathbf{k})}-A^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{12}$$

Согласно (12), при любой величине волнового вектора $\mathbf{k}$ существуют две области устойчивости по отношению к нарастанию малых амплитудных возмущений с волновым вектором $\mathbf{Q}$:

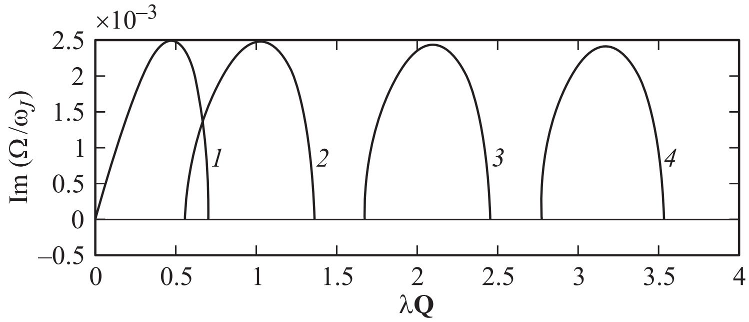
$$0 \leqslant \mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k}) \quad \text{и} \quad \mathbf{Q} \geqslant \mathbf{Q}_{B2}(\mathbf{k}, A, L),$$

где $L = (\lambda_J/\lambda)^2$, а $\mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}$ и

$$\mathbf{Q}_{B2}(\mathbf{k}, A, L) = \frac{1}{2}(\mathbf{k} + A^2\lambda/\lambda_J^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(\mathbf{k} + A^2\lambda/\lambda_J^2)^2 + \mathbf{k}A^2\lambda/\lambda_J^2}.$$

В области волновых векторов возмущения $\mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k}) < \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{B2}(\mathbf{k}, A, L)$ развивается модуляционная неустойчивость. Максимальное значение инкремента нарастания равно $\gamma_{\max}(\mathbf{Q}_m)/\omega_J = A^2/4(1+\lambda_J^2\mathbf{k}/\lambda)^{1/2}$ и достигается при значении волнового вектора

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{k} + A^2\lambda/2\lambda_J^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(\mathbf{k} + A^2\lambda/2\lambda_J^2)^2 + \mathbf{k}A^2\lambda/2\lambda_J^2}.$$



Области модуляционной неустойчивости плоской нелинейной диспергирующей электромагнитной волны (6) при фиксированных значениях величин амплитуды $A = 10^{-1}$ и параметра $L = 0.25 \cdot 10^{-1}$ для значений приведенного волнового вектора: *1* — $\mathbf{k}\lambda = 0$, *2* — $\mathbf{k}\lambda = 1$, *3* — $\mathbf{k}\lambda = 2$, *4* — $\mathbf{k}\lambda = 3$.

В общем случае дисперсионное уравнение (10) удается исследовать только численно. В области волновых векторов $\mathbf{k}\lambda \geqslant 1$, в которой также существенна пространственная нелокальность, при выполнении неравенства $\lambda_J \leqslant \lambda$ численный анализ показал существование двух областей устойчивости волн $0 \leqslant \mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{Q} \geqslant \mathbf{Q}_{B2}(\mathbf{k}, A, L)$ и одной области их неустойчивости $\mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k}) < \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{B2}(\mathbf{k}, A, L)$. Под областью модуляционной неустойчивости следует понимать ту область волновых векторов малых амплитудных модуляций $\mathbf{Q}$, для которой величина инкремента их нарастания $\gamma(\mathbf{Q})$ положительна и отлична от нуля.

На рисунке показаны области модуляционной неустойчивости при фиксированных значениях величин амплитуды A и параметра L для четырех значений приведенного волнового вектора $\mathbf{k}\lambda$. Согласно рисунку, очевидно, существует возможность управления областью модуляционной неустойчивости с помощью волнового вектора несущей волны (моды линейного приближения) $\mathbf{k}$ (или соответствующей ему частоты $\omega(\mathbf{k})$), с увеличением величины которого область неустойчивости смещается как целое в сторону больших величин $\mathbf{Q}$. Поэтому при величине $\mathbf{k} \neq 0$, т.е. для волн с дисперсией, длинноволновая область волновых векторов $0 \leqslant \mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k})$ всегда является устойчивой.

Итак, пространственная нелокальность уравнения для разности фаз оказывается очень существенной для нелинейных плоских диспергирующих волн постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты.

Во-первых, для волн с дисперсией область крупномасштабных возмущений амплитуды всегда является устойчивой. И во-вторых, существует возможность управления областью модуляционной неустойчивости с помощью параметра дисперсии $\mathbf{k}$ или частоты $\omega(\mathbf{k})$, что весьма важно при проведении соответствующих экспериментальных исследований.

Важно помнить, что в теории джозефсоновских переходов частота $\omega(\mathbf{k})$ должна быть меньше предельной Δ_{lim} [12], определяющейся шириной энергетической щели Δ.

Экспериментально развитие модуляционной неустойчивости возможно наблюдать в длинных переходах Джозефсона, состоящих из массивных сверхпроводников при возбуждении в них диспергирующих волн малой, но конечной амплитуды с малой ее модуляцией.

Диспергирующая плоская нелинейная волна постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты в процессе развития модуляционной неустойчивости будет эволюционировать в цепочку импульсов — волновых пакетов, частота повторения которых определяется периодом модуляции амплитуды исходной волны $L_0 = 2\pi/\mathbf{Q}$, для волновых векторов $\mathbf{Q}$, определяемых неравенством $\mathbf{Q}_{B1}(\mathbf{k}) < \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{B2}(\mathbf{k}, A, L)$. В силу того что мы не учитывали фазовые модуляции, а ограничились лишь учетом модуляций амплитуды, самосжатия волновых пакетов наблюдаться не будет.

Аналогичное поведение областей модуляционной неустойчивости диспергирующих электромагнитных волн следует ожидать также и в джозефсоновских переходах в тонких сверхпроводящих пленках толщиной $d \ll \lambda$.

В заключение выражаю благодарность Ю.В. Медведеву, И.Б. Краснюку, Ю.Е. Кузовлеву и С.А. Федорову за полезные обсуждения, постоянное внимание и поддержку.

Список литературы

[1] *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
[2] *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 240 с.
[3] *Аскарьян Г.А.* // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. № 6. С. 1567–1572.
[4] *Беспалов В.И., Таланов В.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. № 12. С. 471–476.

[5] *Lighthill M.J.* // J. Inst. Math. Appl. 1965. V. 1. N 2. P. 269–273.
[6] *Алиев Ю.М., Силин В.П., Урюпин С.А.* // Сверхпроводимость. 1992. Т. 5. № 2. С. 228–235.
[7] *Gurevich A.* // Phys. Rev. B. 1992. V. 46. N 5. P. 3187–3190.
[8] *Абдуллаев Ф.Х.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 2. С. 8–11.
[9] *Бароне А., Патерно Дж.* Эффект Джозефсона: физика и применения. М.: Мир, 1984. 639 с.
[10] *Лихарев К.К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. 320 с.
[11] *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
[12] *Ларкин А.И., Овчинников Ю.Н.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. № 5 (11). С. 1535–1543.