

01;05

Трибоспектроскопия поверхностей со статистически случайными шероховатостями

© В.Л. Попов, О.К. Дудко

Берлинский технический университет, Берлин, Германия
Международный центр исследований по физической мезомеханике
материалов, Томск, Россия
Физико-технический институт низких температур, Харьков, Украина

Поступило в Редакцию 18 августа 2003 г.

Теоретически исследуется зависимость статической силы трения двух тел, движущихся в случайном потенциале и соединенных быстро осциллирующей связью, от амплитуды осцилляций. Показано, что по зависимости силы трения от амплитуды колебаний можно восстановить спектральную плотность потенциала. Полученные результаты дают возможность экспериментального изучения характерного масштаба процессов трения путем изучения закона трения осциллирующих трибосистем.

Для формулировки адекватных моделей трения и износа важно знать характерный масштабный уровень, на котором протекают процессы, ответственные за формирование силы трения. Зачастую, однако, выделение такого определяющего масштаба оказывается нетривиальным, поскольку существенный вклад в силу трения дают процессы, одновременно протекающие на различных масштабных уровнях. Так, многие технические поверхности имеют микронеоднородности на многих масштабах. Экспериментальные исследования показывают, что, например, поверхности железнодорожных рельсов или асфальтового покрытия дорог, так же как и многие „естественные“ поверхности разрушения, являются самоподобными в широком интервале волновых векторов и могут быть отнесены к классу фрактальных¹ [1–3].

В настоящей работе мы исследуем вопрос, в какой степени по наблюдаемой макроскопической силе трения можно восстановить фор-

¹ Поверхности железнодорожных колес и рельсов обнаруживают фрактальную структуру в интервале длин волн от 0.3 mm до 1 cm [2].

му микроскопического потенциала взаимодействия, ответственного за формирование силы трения. При этом в качестве модели трения мы используем обобщенную модель Томлинсона [4]. Несмотря на простоту, она описывает многие существенные черты сухого трения и с различными вариациями интенсивно эксплуатировалась в последнее время в физике трения (см., например, [5–8]).

Рассмотрим одномерное движение тела в периодическом потенциале с вязким затуханием. Уравнение движения тела в таком потенциале имеет вид

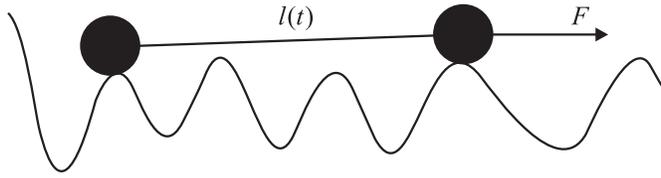
$$m\ddot{x} = F - \eta\dot{x} - N \sin(2\pi x/a), \quad (1)$$

где x — координата тела, m — его масса, F — действующая на тело сила, η — коэффициент затухания, N — амплитуда периодической силы, a — длина волны периодического потенциала. Модель Томлинсона описывает многие существенные черты сухого трения. Действительно, приложение к телу достаточно малой силы приводит только к его малому смещению из минимума потенциальной энергии, после чего дальнейшее движение прекращается. Возникающую силу противодействия мы макроскопически воспринимаем как силу трения покоя. Очевидно, что равновесие в периодическом потенциале в присутствии постоянной тангенциальной силы невозможно при превышении этой силой некоторого критического значения, воспринимаемого макроскопически как максимальная сила трения покоя, после преодоления которой начинается макроскопическое скольжение тела.² В модели (1) критическое значение силы равно N . Можно показать, что зависимость приложенной силы F от средней скорости скольжения, воспринимаемая макроскопическим наблюдателем как *закон трения* системы, слабочувствительна к периоду потенциала. Так, например, при большой вязкости закон трения может быть вычислен аналитически:

$$F = \sqrt{N^2 + (\eta\langle\dot{x}\rangle)^2}. \quad (2)$$

Он не зависит от пространственного периода потенциала. Таким образом, восстановление микроскопического потенциала по *стационарной силе трения* невозможно.

² Под „макроскопическим“ поведением тела мы понимаем здесь поведение тела на пространственном масштабе, существенно превышающем период потенциала. Напротив, шкала, определяемая периодом потенциала, рассматривается нами в данном контексте как микроскопическая.



Два тела, соединенных связью переменной длины, движущиеся в случайном потенциале.

Ситуация, однако, существенно изменяется, если наряду с постоянной компонентой приложить к телу быстро осциллирующую силу или приложить постоянную силу к быстро осциллирующей паре тел. В качестве модели такой осциллирующей трибосистемы рассмотрим две точечных массы, связанных быстро осциллирующей связью длины

$$l = l_0 + \Delta l \sin(\omega t), \quad (3)$$

движущиеся в случайном потенциале $U = U(x)$, задаваемом его спектральным разложением

$$U(x) = \int_0^{\infty} c(k) \cos(kx + \varphi_k) dk, \quad (4)$$

при наличии постоянной внешней силы F (см. рисунок). Здесь φ_k — случайная фаза, которую мы будем считать δ -коррелированной (белый шум):

$$\langle \sin \varphi_k \sin \varphi_{k'} \rangle = \Phi \delta(k - k'). \quad (5)$$

Уравнение движения для центра масс двух тел имеет вид

$$2m\ddot{x} = F - 2\eta\dot{x} - \frac{\partial U(x - l/2)}{\partial x} - \frac{\partial U(x + l/2)}{\partial x}. \quad (6)$$

В предположении, что частота осцилляции длины связи намного больше, чем характерная частота собственных колебаний системы в потенциале $U(x)$, можно усреднить уравнение (6) по периоду быстрых осцилляций связи (это усреднение мы будем обозначать чертой над

соответствующей переменной). Для „медленной“ компоненты движения имеем тогда

$$2m\ddot{x} = F - 2\eta\dot{x} - \frac{\partial \overline{U(x - l(t)/2)}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{U(x + l(t)/2)}}{\partial x}. \quad (7)$$

В частности, при отсутствии макроскопического движения

$$F = \frac{\partial \overline{U(x - l(t)/2)}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U(x + l(t)/2)}}{\partial x}. \quad (8)$$

Это выражение определяет макроскопически наблюдаемую „силу трения покоя“ осциллирующей пары. С учетом (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \overline{F(x)} &= - \int_0^{\infty} c(k)k [\sin(k(x - l/2) + \varphi_k) + \sin(k(x + l/2) + \varphi_k)] dk \\ &= -2 \int_0^{\infty} c(k)k \sin(kx + \varphi_k) \left[\cos \frac{kl_0}{2} \cdot \cos\left(\frac{k\Delta l}{2} \sin \omega t\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{kl_0}{2} \cdot \sin\left(\frac{k\Delta l}{2} \sin \omega t\right) \right] dk. \end{aligned} \quad (9)$$

Усреднение по времени с учетом известных разложений [9]

$$\cos(\psi \sin \omega t) = J_0(\psi) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\psi) \cos(2k\omega t), \quad (10)$$

$$\sin(\psi \cos \omega t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\psi) \cos((2k+1)\omega t), \quad (11)$$

где $J_n(\psi)$ — функция Бесселя n -го порядка, дает

$$\overline{F(x)} = -2 \int_0^{\infty} c(k)k \sin(kx + \varphi_k) \cos \frac{kl_0}{2} J_0\left(\frac{k\Delta l}{2}\right) dk. \quad (12)$$

Для определения максимальной силы трения покоя осциллирующей пары в случайном потенциале отметим, во-первых, что эта сила является случайной функцией начального положения тела. Другими словами,

имеется определенная функция распределения статических сил трения. Эта функция распределения может быть найдена только численно. С другой стороны, среднее значение статической силы трения, очевидно, имеет тот же порядок величины, что и среднеквадратичное значение силы. Основные особенности зависимости статической силы трения от амплитуды осцилляции связи мы можем поэтому выявить, определив среднее значение квадрата силы, действующей на пару в потенциале:

$$\begin{aligned} \langle \overline{F(x)^2} \rangle &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} c(k)c(k')kk' \langle \sin(kx + \varphi_k) \sin(k'x + \varphi_{k'}) \rangle \\ &\times \cos \frac{kl_0}{2} \cos \frac{k'l_0}{2} J_0 \left(\frac{k\Delta l}{2} \right) J_0 \left(\frac{k'\Delta l}{2} \right) dkdk'. \end{aligned} \quad (13)$$

Угловые скобки означают здесь усреднение по ансамблю. Учитывая (5), $\langle \sin(kx + \varphi_k) \sin(k'x + \varphi_{k'}) \rangle = \Phi \delta(k - k')$. Для среднего значения квадрата силы имеем, таким образом,

$$\langle \overline{F(x)^2} \rangle = \Phi \int_0^{\infty} c(k)^2 k^2 \cos^2 \frac{kl_0}{2} J_0^2 \left(\frac{k\Delta l}{2} \right) dk. \quad (14)$$

Это выражение может быть упрощено в случае большой величины средней длины связи l_0 . Если эта длина является „макроскопически большой“ в том смысле, что она намного больше любого характерного микроскопического масштаба, то функция $\cos^2 \frac{kl_0}{2}$ в подынтегральном выражении (14) изменяется намного быстрее других подынтегральных множителей и может быть заменена на ее среднее значение 1/2:

$$\langle \overline{F(x)^2} \rangle = \frac{\Phi}{2} \int_{k_1}^{k_2} c(k)^2 k^2 J_0^2 \left(\frac{k\Delta l}{2} \right) dk. \quad (15)$$

Сила трения в этом случае не зависит от средней длины связи.

Покажем теперь, каким образом по зависимости силы трения от амплитуды колебаний Δl может быть восстановлена спектральная плотность $c(k)^2$ потенциала взаимодействия. При этом мы ограничимся качественным обсуждением метода решения обратной задачи. Отметим

прежде всего, что при больших значениях аргумента имеет место следующее асимптотическое выражение для функции Бесселя:

$$J_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right).$$

Подставляя эту асимптотику в (15), получим

$$\begin{aligned} \langle \overline{F(x)^2} \rangle &= \frac{2\Phi}{\pi\Delta l} \int_{k_1}^{k_2} c(k)^2 k \cos^2\left(\frac{k\Delta l}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dk \\ &= \frac{\Phi}{\pi\Delta l} \int_{k_1}^{k_2} c(k)^2 k [1 + \sin(k\Delta l)] dk. \end{aligned} \quad (16)$$

Умножив это уравнение на Δl и сделав обратное Фурье-преобразование, найдем

$$\int_0^{\infty} \langle \overline{F(x)^2} \rangle \Delta l \sin(k\Delta l) d(\Delta l) = \frac{\Phi}{2\pi^2} c(k)^2 k.$$

Таким образом, спектральная плотность потенциала взаимодействия может быть определена по формуле

$$c(k)^2 = \frac{1}{k} \frac{2\pi^2}{\Phi} \int_0^{\infty} \langle \overline{F(x)^2} \rangle \Delta l \sin(k\Delta l) d(\Delta l). \quad (17)$$

Мы рассмотрели модификацию закона трения под действием высокочастотных возбуждений. Рассмотренная система может быть экспериментально реализована в виде двух тел, соединенных пьезоэлементом, совершающим высокочастотные колебания. Мы показали, что по зависимости статической силы трения от амплитуды колебаний может быть определена спектральная плотность потенциала взаимодействия, ответственного за возникновение силы трения и тем самым относительный вклад различных масштабных уровней системы в силу трения. Полученные результаты дают возможность экспериментального изучения характерного масштаба процессов трения путем изучения закона трения осциллирующих трибосистем.

Список литературы

- [1] *Persson B.N.J., Bucher F., Chiaia B.* // Phys. Rev. B. 2002. V. 65 (18): art. no. 184106.
- [2] *Bucher F.* The Contact Between Micro-Rough Rails and Wheels. PhD, TU Berlin, 2002.
- [3] *Попов В.Л., Псахье С.Г., Шилько Е.В. и др.* // Физическая мезомеханика. 2002. V. 5. № 3. С. 17–25.
- [4] *Tomlinson G.A.* // Philos. Mag. 1929. V. 7. P. 905.
- [5] *Persson B.N.J.* Sliding friction. Physical Principles and Applications. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [6] *Zaloz V., Urbakh M., Klafter J.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. N 6. P. 1227.
- [7] *Zaloz V., Urbakh M., Klafter J.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. N 24. P. 4823.
- [8] *Popov V.L.* // Solid State Commun. 2000. V. 115. P. 369–373.
- [9] *Barone A., Paterno G.* Physics and Applications of the Josephson Effect. Wiley & Sons, 1982.