

01

Одномерное фрактальное блуждание с конечной скоростью свободного движения

© В.В. Учайкин, Р.Т. Сибатов

Ульяновский государственный университет
E-mail: uchaikin@sv.uven.ru

Поступило в Редакцию 8 октября 2003 г.

Рассматривается одномерное симметричное фрактальное (с асимптотически степенным распределением свободных пробегов $\propto x^{-\alpha-1}$) блуждание частицы, моделирующее процессы переноса в сильно неоднородных средах фрактального типа. Найдено пространственное распределение: при $\alpha > 2$ оно является гауссовым, при $1 < \alpha < 2$ — устойчивым распределением Леви, при $\alpha < 1$ оно сосредоточено на конечном отрезке, имеет минимум в центре и интегрируемые особенности на его концах. Качественное различие этих распределений объясняется преобладанием одного из двух конкурирующих процессов: диффузионного (при $\alpha > 1$) и баллистического (при $\alpha < 1$).

В основе теории переноса и ее многочисленных приложений (см. например, [1]) лежит простая модель блуждания частицы, траектория которой представляет собой ломаную со случайными независимыми друг от друга прямолинейными отрезками — свободными пробегами. Распределение длин свободных пробегов в однородной среде подчиняется экспоненциальному закону. В неоднородной среде экспоненциальному распределению подчиняется оптический пробег—интеграл от сечения взаимодействия вдоль отрезка. В случае самоподобной неоднородной (фрактальной) среды, моделирующей пористые и другие среды (см., например, обзор [2] и монографию [3]), понятие сечения неприменимо вообще и распределения блуждающих частиц принимают необычный вид. Простейшей задаче такого рода посвящена настоящая работа.

Одномерное симметричное блуждание частицы с постоянной по величине скоростью v характеризуется плотностью распределения

координаты блуждающей частицы в момент времени t :

$$p(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t [f(x - v\tau, t - \tau) + f(x + v\tau, t - \tau)] P(v\tau) d\tau, \quad (1)$$

где $P(x) = \int_x^\infty p(x) dx$, $p(x)$ — плотность распределения случайного пробега частицы, в конце которого она с вероятностью $1/2$ может изменить направление движения, $f(x, t)$ — плотность столкновений (среднее число столкновений на единичном интервале в единицу времени). Если частица начинает блуждание из начала координат в момент времени $t = 0$, плотность $f(x, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению [4]

$$f(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t [f(x - v\tau, t - \tau) + f(x + v\tau, t - \tau)] p(v\tau) d\tau + \delta(x)\delta(t). \quad (2)$$

В случае однородной среды, когда распределение пробегов имеет экспоненциальный вид, оно превращается в дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка (телеграфное уравнение) [5]. Его автомодельное решение выражается через модифицированные функции Бесселя и в асимптотике больших времен переходит в нормальное (Гауссово) распределение. В случае произвольной плотности $p(x)$ с конечным вторым моментом телеграфному уравнению удовлетворяет асимптотическая часть решения. В работах [4,6,7] указано на существование асимптотически автомодельных решений в случае фрактальных блужданий, когда $p(x) \sim \alpha x_0^\alpha x^{-\alpha-1}$, $0 < \alpha < 2$. Ниже приводятся вычисления таких распределений.

С помощью преобразования Фурье—Лапласа

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(ikx - \lambda t) p(x, t)$$

интегральные соотношения (1), (2) преобразуются в алгебраические

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k, \lambda) &= \frac{1}{v} W(k, \lambda) \tilde{f}(k, \lambda), \\ \tilde{f}(k, \lambda) &= 1 + \omega(k, \lambda) \tilde{f}(k, \lambda), \end{aligned}$$

разрешая которые относительно трансформанты искомого распределения, получим

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{W(k, \lambda)}{v[1 - w(k, \lambda)]}. \quad (3)$$

Здесь

$$w(k, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda/v)x} \cos(kx) p(x) dx = (1/2) [\tilde{p}(\lambda/v - ik) + \tilde{p}(\lambda/v + ik)],$$

$$W(k, \lambda) = \int_0^{\infty} \left[e^{-(\lambda/v)x} \cos(kx) \int_x^{\infty} p(\xi) d\xi \right] dx = \frac{\lambda/v}{(\lambda/v)^2 + k^2} [1 - w(k, \lambda)] + \frac{k}{(\lambda/v)^2 + k^2} (1/2i) [\tilde{p}(\lambda/v - ik) - \tilde{p}(\lambda/v + ik)],$$

где

$$\tilde{p}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} p(x) dx$$

— трансформанта Лапласа плотности распределения пробегов.

В результате подстановки этих выражений в формулу (3) находим, что

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{2(\lambda/v) - (\lambda/v + ik)\tilde{p}(\lambda/v - ik) - (\lambda/v - ik)\tilde{p}(\lambda/v + ik)}{v[k^2 + (\lambda/v)^2][2 - \tilde{p}(\lambda/v - ik) - \tilde{p}(\lambda/v + ik)]}. \quad (4)$$

Согласно Тауберовой теореме [8], асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение плотности $p(x, t)$ определяется асимптотическим (при $\lambda \rightarrow 0$) поведением трансформанты $\tilde{p}(k, \lambda)$. В случае фрактальных блужданий имеют место следующие разложения:

$$\tilde{p}(\lambda) = 1 - c\lambda^\alpha, \quad c = (A/\alpha)\Gamma(1 - \alpha), \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\tilde{p}(\lambda) = 1 - m_1\lambda + c_1\lambda^\alpha, \quad c_1 = (A/\alpha)\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\alpha - 1}, \quad 1 < \alpha < 2,$$

$$\tilde{p}(\lambda) = 1 - m_1\lambda + (m_2/2)\lambda^2 - c_2\lambda^\alpha, \quad c_2 = (A/\alpha)\frac{\Gamma(3 - \alpha)}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2,$$

где m_k — моменты распределения пробегов.

В первом случае ($0 < \alpha < 1$) приходим к выражению

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{(\lambda/v - ik)^{\alpha-1} + (\lambda/v + ik)^{\alpha-1}}{v[(\lambda/v - ik)^\alpha + (\lambda/v + ik)^\alpha]}.$$

При $\alpha = 1/2$ трансформанта

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1}{v\sqrt{(\lambda/v)^2 + k^2}}$$

легко обращается

$$p(x, t; 1/2) = \frac{1}{\pi\sqrt{(vt)^2 - x^2}}. \quad (5)$$

При $1 < \alpha < 2$ в асимптотике $|\lambda/vk| \rightarrow 0$ трансформанта

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{2m_1 - c_1(\lambda/v - ik)^{\alpha-1} - c_1(\lambda/v + ik)^{\alpha-1}}{v[2m_1(\lambda/v) - c_1(\lambda/v - ik)^\alpha - c_1(\lambda/v + ik)^\alpha]} \sim \frac{1}{v[(\lambda/v) + R|k|^\alpha]},$$

где

$$R = (c_1/m_1)|\cos(\alpha\pi/2)| = [\Gamma(2 - \alpha)/\varepsilon^{1-\alpha}]|\cos(\alpha\pi/2)|.$$

Обратное преобразование Лапласа приводит к характеристической функции случайной координаты блуждающей частицы, связанной с характеристической функцией $\tilde{g}(k; \alpha) = \exp(-|k|^\alpha)$ устойчивой плотности распределения $g(x; \alpha)$ соотношением

$$\tilde{p}(k, t) = e^{-Rvt|k|^\alpha} = \tilde{g}((Rvt)^{1/\alpha}k).$$

Восстановим $p(x, t)$

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(k, t) e^{-ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|(Rvt)^{1/\alpha}k|^\alpha} e^{-ikx} dk \\ &= (Rvt)^{-1/\alpha} g(x(Rvt)^{-1/\alpha}; \alpha, 0), \end{aligned}$$

где $g(x; \alpha, 0)$ — симметричная устойчивая плотность [9].

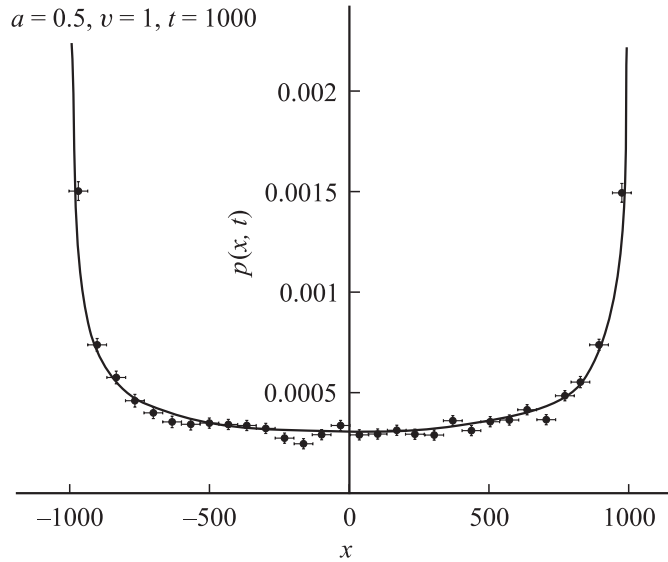


Рис. 1. Плотность распределения $p(x, t)$ ($t = 10^3$, $v = 1$, $\alpha = 1/2$). Сплошная линия — расчет по формуле (5), точки — результат моделирования методом Монте-Карло.

Наконец при $\alpha > 2$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k, \lambda) &= \frac{2m_1 - m_2(\lambda/v) + c_2(\lambda/v - ik)^{\alpha-1} + c_2(\lambda/v + ik)^{\alpha-1}}{v[2m_1(\lambda/v) - m_2((\lambda/v)^2 - k^2) + c_2(\lambda/v - ik)^\alpha + c_2(\lambda/v + ik)^\alpha]} \\ &\sim \frac{1}{v[(\lambda/v) + (m_2/2m_1)k^2]}. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$p(x, t) = (1/\sqrt{vtm_2/2m_1})g(x/\sqrt{vtm_2/2m_1}; 2, 0),$$

где $g(x; 2, 0)$ — плотность распределения Гаусса.

Результаты численных расчетов для $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 3/2$ показаны на рис. 1 и 2 в сравнении с данными прямого моделирования методом Монте-Карло. Качественное различие этих распределений объясняется конкуренцией двух процессов: диффузионного, расширяющегося в

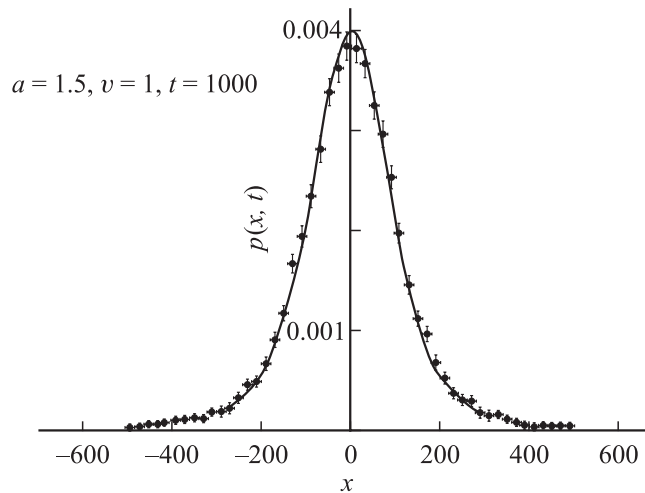


Рис. 2. Плотность распределения $p(x, t)$ ($t = 10^3$, $v = 1$, $\alpha = 3/2$). Сплошная линия — построена по данным из таблицы для устойчивых плотностей, точки — результат моделирования методом Монте-Карло.

отсутствие ограничений $\propto t^{1/\alpha}$, и баллистического, ограничивающего положение частицы отрезком $[-vt, vt]$. При $\alpha > 1$ на больших временах доминирует первый из них (быстро расширяющийся интервал $[-vt, vt]$ перестает влиять на диффузию), при $\alpha < 1$ роль кинематического ограничения возрастает, и само распределение концентрируется в областях, примыкающих к границам. Впервые распределение такого типа было получено методом Монте-Карло в работе [10].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00163) и Британского фонда Royal-Society (грант gt/fSU/JP).

Список литературы

- [1] Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978.
- [2] Isichenko M.B. // Rev. Mod. Phys. 1992. V. 64. P. 961.

- [3] *Ben-Avraham D., Havlin S.* Diffusions and Reactions in Fractal and Disordered Systems. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [4] *Учайкин В.В.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. С. 138–139.
- [5] *Uchaikin V.V., Saenko V.V.* // Journal of Physical Studies. 2000. V. 4. N 4. P. 371–379.
- [6] *Uchaikin V.V.* // Physica A. 1998. V. 255. P. 65–92.
- [7] *Uchaikin V.V., Zolotarev V.M.* Chance and Stability. Utrecht, The Netherlands, VSP, 1999.
- [8] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
- [9] *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Физматлит, 1983. 304 с.
- [10] *Золотарев В.М., Учайкин В.В., Саенко В.В.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. В. 4. С. 1411–1425.