

01

## Перемежаемость волн пространственного заряда

© Ю.Н. Зайко

Поволжская Академия государственной службы им. П.А. Столыпина,  
Саратов

E-mail: zyrnick@lycos.com

*В окончательной редакции 30 декабря 2003 г.*

Рассматривается перемежаемость нелинейных волн в одномерном потоке заряженных частиц. Получено двухмодовое решение для волн в системе координат, в которой волна покоится. Вторая из мод соответствует модуляции основной (первой) моды. Резонансное взаимодействие двух мод может приводить к резкому изменению параметров фазовой траектории, заключающемуся в случайном изменении амплитуды волны. С целью упрощения расчетов предложен метод расчета, основанный на формальном квантовании классического решения. Получено уравнение Шредингера и показано, что его решение формально совпадает с решением известной кулоновской задачи. Вычислена вероятность перехода между уровнями с разными значениями азимутального квантового числа, отвечающими разным амплитудам классического решения. С помощью соотношения неопределенности „азимутальное число–угол“ получена вероятность распределения  $W(\Delta\Phi)$ , где  $\Delta\Phi$  — длительность по фазе регулярного (ламинарного) участка траектории.

Перемежаемость — одно из проявлений турбулентности, заключается в появлении на фоне регулярного поведения некоторой величины, например скорости турбулентного потока резких нерегулярных изменений. Моменты времени появления этих возмущений и их величина носят случайный характер [1]. Физика этого явления связана с взаимодействием, как минимум, двух волн, например, основной гармоники и субгармоники. Перекачка энергии от основной волны к субгармонике приводит к росту амплитуды последней. Когда амплитуда субгармоники становится порядка величины начальной амплитуды основной гармоники, происходит резкое увеличение амплитуды субгармоники, после чего она устанавливается на случайном уровне. Чем меньше этот уровень, тем дольше так называемый ламинарный период [1].

Рассмотрим задачу о волнах пространственного заряда в одномерном потоке заряженных частиц, распространяющемся вдоль координаты  $z$ , описываемом системой уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (nv) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi e(n - n_0); \quad (1)$$

—  $e$ ,  $m$  — заряд и масса частиц,  $\varphi$  — потенциал пространственного заряда,  $v$  — скорость частиц,  $n$  — плотность числа частиц,  $n_0$  — равновесная плотность,  $t$  — время. Стационарные волны, т.е. волны с невозмущенной фазой, зависящие от  $z - ut$ , в системе координат, в которой волна покоится ( $u = 0$ ), описываются решением [2], которое далее используется в качестве невозмущенного решения (1):

$$\frac{dv}{dz} = \pm \omega_p \frac{\sqrt{A^2 - (v - v_0)^2}}{v},$$

$$z - z_0 = \pm \frac{1}{\omega_p} \int \frac{v dv}{\sqrt{A^2 - (v - v_0)^2}}, \quad (2)$$

$A$  — амплитуда волны,  $\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$  — плазменная частота,  $v_0$  — средняя скорость потока. Это решение — пример так называемых однофазовых решений, т.е. зависящих от одной фазы. Ниже предложен метод получения двухфазовых решений [3], которые ввиду наличия резонансов могут приводить к сложной динамике и, как следствие, к статистическому поведению системы [4]. В настоящей работе для исследования статистических свойств системы предложен метод, основанный на формальной процедуре квантования решения (2).

Введем функцию Гамильтона для (2):

$$H(p_v, p_\chi, v) = \frac{p_v^2}{2} - \frac{p_\chi^2}{2v^2} - \frac{\omega_p^2 v_0}{v} + \frac{\omega_p^2}{2},$$

$p_v = dv/dz$ ,  $p_\chi = v^2 d\chi/dz$  — импульсы, роль координаты играет скорость  $v$ , а времени —  $z$ . Вторая, циклическая координата  $\chi$ , определяемая соотношением  $d\chi/dz = \omega_p \times (v_0^2 - A^2)^{1/2} / v^2$  при  $A \rightarrow 0$  совпадает с фазой стационарного решения (2)  $\Phi = \omega_p(z - z_0)/v_0$  с точностью до постоянной. Ее смысл выяснится позже. Такой вид гамильтониана продиктован симметрией

решения (2). Уравнение (2) может быть получено из уравнений Гамильтона:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p_v}, \quad \frac{d\chi}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p_\chi}, \quad \frac{dp_v}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dp_\chi}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial \chi} = 0.$$

Из последнего уравнения следует наличие инварианта

$$I_\chi = p_\chi = \omega_p(v_0^2 - A^2)^{1/2}.$$

Вторым инвариантом является

$$I_v = \frac{1}{2\pi} \oint p_v dv = \omega_p [v_0 - (v_0^2 - A^2)^{1/2}].$$

Представим скорость  $v$  в виде вектора на плоскости „скорость–фаза“ с полярными координатами  $(v, \chi)$ . Интегрируя уравнение для  $\chi$  с помощью (2) (для знака +), получим уравнение траектории точки, изображающей движение системы на плоскости „скорость–фаза“ в виде эллипса  $v = (v_0^2 - A^2)/(v_0 - A \cdot \sin \chi)$ . Такое представление решения (2) удобнее известного, выражаемого с помощью неявной функции  $v = v_0 + A \cdot \sin[\Phi - 1/v_0(A^2 - (v - v_0)^2)^{1/2}]$ .

Получим уравнение Шредингера для волновой функции  $\psi(v, \tilde{t})$ , исходя из принципа соответствия. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид уравнения для  $\psi$ :

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi, \quad U = -\hbar \omega_p \cdot \frac{2v_0}{v},$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}, \quad r = \frac{v}{\omega_p \sqrt{2}}; \quad \tilde{t} = \frac{z}{v_0}. \quad (3)$$

Классическому стационарному решению (2) соответствует зависимость  $\psi \sim \exp(-i\omega_p t + il\chi)$ ,  $l$  — целое. Вводя новую переменную  $\rho = 2\omega_p v/\mu$ , где  $\mu = (\hbar\omega_p/m)^{1/2}\omega_p$  ( $\hbar$  — постоянная Планка), и обозначения  $s = \omega_p v_0/\mu$  и  $l'(l' + 1) = p_\chi^2/\mu^2 = (v_0^2 - A^2)\omega_p^2/\mu^2$ ,  $l' = l - 1/2$ , получим уравнение для  $R(\rho) = (\mu/2\omega_p)^{1/2} \cdot \rho^{-1/2} \psi$ :

$$R'' + \frac{2R'}{\rho} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{s}{\rho} - \frac{l'(l' + 1)}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (4)$$

Амплитуда  $A$  и средняя скорость потока  $v_0$  в этих обозначениях имеют вид  $v_0 = (\hbar\omega_p/m)^{1/2}s$ ,  $A^2 = \hbar\omega_p/m \cdot [s^2 - l'(l' + 1)]$ . Уравнение (4) описывает в квантовой механике задачу об атоме водорода [5]. Представляя  $R(\rho) = \rho^{l'} e^{-\rho/2} w(\rho)$  ( $l' \geq 0$ ), получим для нормируемых с квадратом решений (4) выражение  $w = F(-s_r, 2l' + 2, \rho)$ , где  $s_r = s - l' - 1$  — радиальное квантовое число (целое, неотрицательное),  $F$  — вырожденная гипергеометрическая функция. Возмущения решения (2), в качестве которых выступают члены исходных уравнений (1) ( $\sim \partial/\partial t$ ), опущенные при выводе (2) при условии их малости, приводят к переходам между квантовыми состояниями с разными  $l'$ . Поскольку все эти состояния отвечают одной энергии  $E = -\hbar\omega_p$ , то вероятность перехода между ними  $W_{12} = |f_{12}|^2$  можно рассчитывать, считая возмущение внезапным [5]. С другой стороны, для  $s \gg 1$  можно использовать квазиклассическое приближение, в котором матричный элемент  $f_{12}$  перехода между состояниями с  $l'_1$  и  $l'_2$  с экспоненциальной точностью равен:

$$f_{12} \sim \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \operatorname{Im} \left[ \int_{r^*}^{r^*} \sqrt{2m(E - U_1^{ef})} dr - \int_{r^*}^{r^*} \sqrt{2m(E - U_2^{ef})} dr \right]\right),$$

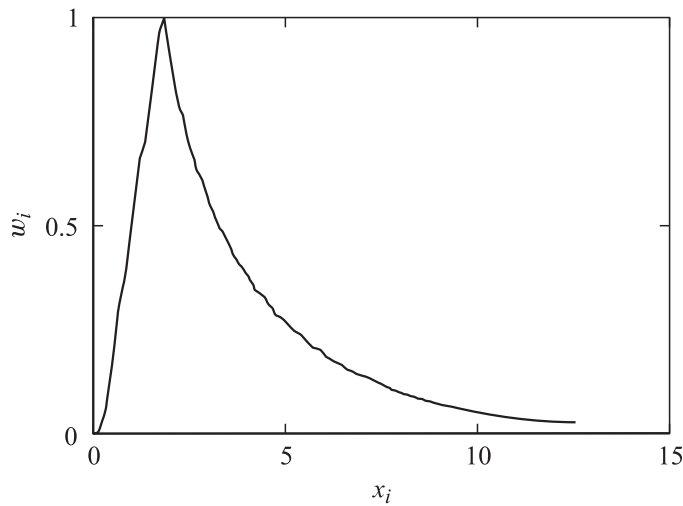
$$U^{ef}(v) = U(v) + \hbar\omega_p \frac{v_0^2 - A^2}{v^2}, \quad (5)$$

где  $r^*$  — особые точки  $U^{ef}(r)$  или корни уравнения  $U_1^{ef}(r) = U_2^{ef}(r)$  [5]. Среди конкурирующих точек:  $r_1^* = 0$ ,  $r_2^* = \infty$  следует выбрать ту, которая приводит к наименьшему по абсолютной величине показателю экспоненты. В нашем случае обе точки дают примерно одинаковый вклад, поэтому ограничимся исследованием точки  $r_2^* = \infty$ . Для нее получим выражение  $W_{12}$ :

$$W_{12} \approx \exp\left(-\left| \frac{(l'_1 + 1/2)^2 - (l'_2 + 1/2)^2}{s} \right|\right) = \exp\left(-\frac{|\Delta l'| \cdot (l'_1 + l'_2 + 1)}{s}\right), \quad (6)$$

где  $\Delta l' = l'_1 - l'_2 = l_1 - l_2 = \Delta l$ . При вычислении (6) сделана лангеровская замена  $l'(l' + 1) \rightarrow (l' + 1/2)^2$  [5]. Для дальнейших рассуждений мы используем известное соотношение неопределенностей между  $\Delta l$  и  $\Delta \chi$  [6]:

$$\frac{\Delta l \cdot \Delta \chi}{1 - \frac{3}{\pi^2} \cdot (\Delta \chi)^2} \geq \frac{1}{2}. \quad (7)$$



Зависимость относительной вероятности  $w(\Delta\Phi) = W/W_{\max}$  от длительности ламинарного участка невозмущенной траектории  $\Delta\Phi$ .  $w_i = w(x_i)$ ,  $x_i = \Delta\Phi$ ,  $1 \leq i \leq 200$ .

Поскольку невозмущенные состояния близки к гауссовым пакетам, можно с хорошей точностью воспользоваться в (7) знаком равенства и положить  $\Delta l = [1/\Delta\chi - 3\Delta\chi/\pi^2]/2$ . Окончательный результат зависит от соотношения  $s$  и  $l$ . Для малых амплитуд классического решения ( $l \sim s \gg 1$ ) мы приходим к выражению для  $W_{12} = W(\Delta\Phi = \Delta\chi)$ :

$$W(\Delta\Phi) \approx \exp\left(-\left|\frac{1}{\Delta\Phi} - \frac{3\Delta\Phi}{\pi^2}\right|\right). \quad (8)$$

На рисунке показан вид кривой относительной, т.е. нормированной на максимальное значение вероятности  $W(\Delta\Phi)$ .

Описываемое явление заключается в случайном изменении амплитуды волны или, пользуясь предложенной моделью, в случайном изменении параметра и эксцентриситета невозмущенной траектории (эллипса) на плоскости „скорость–фаза“  $(v, \chi)$  под действием возмущения, причем величина  $\Delta\chi$  — продолжительность (по фазе) невозмущенного (ламинарного) участка траектории. То, что постоянная Планка не вошла в (8), говорит о классической природе явления.

Соответствие с известным классическим результатом [1] станет еще более очевидным, если записать уравнение траектории в виде  $s = s(\chi)$ , где  $s$  — расстояние вдоль траектории, отсчитываемое от перигелия орбиты.

## Список литературы

- [1] *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / Пер с фран. Ю.А. Данилова. М.: Мир, 1991. 367 с.
- [2] *Ахиезер А.И.* и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 719 с.
- [3] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны / Пер. с англ. Под ред. А.Б. Шабата. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [4] *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
- [5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.
- [6] *Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971. 544 с.
- [7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.