01;09

Временнóе запаздывание между неустойчивыми периодическими орбитами связанных хаотических осцилляторов

© *А.А. Короновский, М.К. Куровская, А.Е. Храмов*

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ГосУНЦ „Колледж“
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 7 сентября 2004 г.

Исследуется временнóе запаздывание между неустойчивыми периодическими орбитами связанных осцилляторов, находящихся в режиме хаотической синхронизации. Показано, что временнóе запаздывание между синхронизованными неустойчивыми периодическими орбитами, встроенными в аттракторы связанных хаотических осцилляторов, оказывается одинаковым для всех синфазных орбит с различными топологическими периодами и зависит от величины параметра связи. Эта зависимость подчиняется универсальному степенному закону с показателем степени „минус единица“.

Хаотическая синхронизация является одним из фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время [1], имеющих важное и прикладное значение (например, при передаче информации с помощью детерминированных хаотических колебаний [2], в биологических задачах [3] и т. д.). На данный момент известно несколько различных типов хаотической синхронизации связанных осцилляторов: обобщенная, фазовая, лаг и полная синхронизация (см., например, [4]). В [5,6] было показано, что фазовая, обобщенная, лаг и полная синхронизации тесно связаны между собой и, по сути дела, являются одним видом синхронных колебаний, названным синхронизацией временны́х масштабов. Характер синхронного режима (фазовая, лаг или полная синхронизация) определяется количеством синхронизованных временны́х масштабов, которые вводятся в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [7].

В данной работе изучается вопрос о том, как изменяется временно́й сдвиг между синхронизованными неустойчивыми седловыми периодическими орбитами в фазовых пространствах взаимодействующих хаотических осцилляторов, соответствующими в общем фазовом пространстве резонансным синфазным седловым циклам $m:m$ при изменении параметра связи между взаимодействующими подсистемами.

Неустойчивые седловые периодические орбиты [8] играют важную роль в случае хаотической синхронизации (см., например, [9–11]). Автономный хаотический осциллятор характеризуется набором неустойчивых седловых орбит различных периодов, встроенных в хаотический аттрактор. Каждый из двух взаимно связанных хаотических осцилляторов со слегка различающимися параметрами при малых значениях параметра связи характеризуется своим собственным набором неустойчивых седловых орбит, при этом седловые орбиты с одинаковым топологическим периодом m имеют различный временно́й период T (время возврата изображающей точки в фиксированную точку орбиты) и соответственно различающиеся частоты. Соответственно в полном фазовом пространстве, образованном парциальными фазовыми пространствами взаимодействующих осцилляторов, будут существовать неустойчивые двумерные торы. При возникновении режима фазовой синхронизации происходит захват частот неустойчивых периодических орбит (см. подробнее [12]) и на двумерных торах возникают резонансные седловые циклы, причем эти циклы могут быть как синфазными, так и несинфазными. В [12] показано, что только синфазные седловые резонансные циклы $m:n$, где $m = n = 1, 2, \ldots$, существуют в широком диапазоне изменения значения параметра связи, включая области фазовой синхронизации и синхронизации с запаздыванием (лаг-синхронизации). Все остальные резонансные седловые циклы (включая несинфазные циклы $m:m$) существуют в относительно небольшом диапазоне значений параметра связи и разрушаются по мере приближения значения параметра связи к порогу возникновения режима лаг-синхронизации.

Остается открытым вопрос о том, как ведет себя временно́й сдвиг между седловыми орбитами парциальных систем, образующих в общем фазовом пространстве резонансный цикл. Интерес к данному вопросу обусловлен результатами, полученными в работе [13], посвященной рассмотрению фазового сдвига между синхронизованными спектральными компонентами взаимодействующих хаотических осцилляторов.

В режиме лаг-синхронизации, когда вектор состояния одной из связанных систем отстает от вектора состояния второй системы во времени на некоторый временно́й лаг $\mathbf{x}_1(t) \simeq \mathbf{x}_2(t + \Delta t)$, временно́й сдвиг между седловыми циклами с топологическими периодами m в первой и второй взаимодействующих системах, соответствующими синфазному резонансному циклу $m:m$ в общем фазовом пространстве, также оказывается равным Δt. В то же время остается невыясненным, как ведет себя величина этого сдвига в режиме фазовой синхронизации.

В качестве объекта исследования были выбраны две взаимно связанные системы Ресслера, находящиеся в режиме динамического хаоса

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2} x_{1,2} + a y_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \tag{1}$$

где ε — параметр связи, $\omega_1 = 0.98$, $\omega_2 = 1.03$. Значения управляющих параметров были выбраны следующими: $a = 0.22$, $p = 0.1$, $c = 8.5$. При величине параметра связи $0.04 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.14$ системы (1) находятся в режиме фазовой синхронизации, а при $\varepsilon > 0.14$ — демонстрируют режим лаг-синхронизации (см. [14]).

В настоящей работе рассматривались синфазные неустойчивые седловые периодические орбиты с различными топологическими периодами, встроенные в хаотические аттракторы взаимодействующих хаотических осцилляторов. Численное интегрирование системы (1) производилось методом Рунге–Кутты четвертого порядка, неустойчивые седловые периодические орбиты выделялись с помощью SD-метода, описанного в работах [15,16]. Поскольку для изучения временно́го сдвига между неустойчивыми периодическими циклами необходимо найти синхронизованные орбиты одновременно в обеих связанных системах, SD-метод применялся для шестимерного фазового пространства, образованного парциальными трехмерными фазовыми пространствами взаимодействующих осцилляторов Ресслера.

На рис. 1 показаны временны́е реализации $x_{1,2}(t)$, соответствующие седловому синфазному резонансному циклу $m:m$ с топологическим периодом $m = 2$ при значении параметра связи $\varepsilon = 0.07$, когда связанные системы (1) демонстрируют режим фазовой синхронизации. Из рисунка видно, что между временны́ми реализациями существует

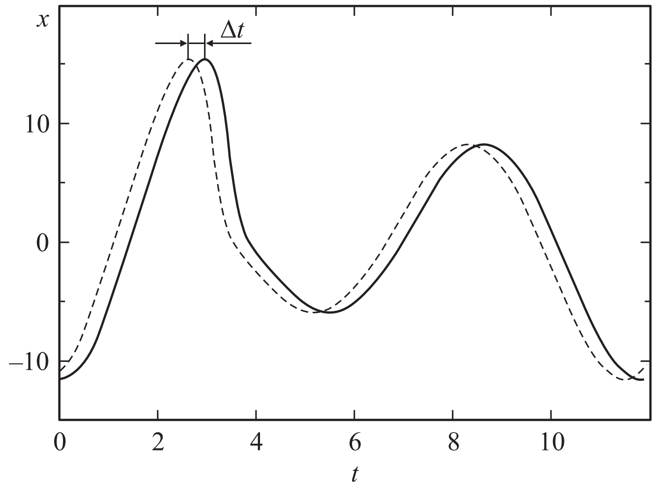

Рис. 1. Временны́е реализации, соответствующие седловому синфазному резонансному циклу $m:m$ с топологическим периодом $m = 2$ при значении параметра связи $\varepsilon = 0.07$, что соответствует режиму фазовой синхронизации. Сплошной линией показана седловая орбита в первой системе, пунктирной — во второй.

некоторый временнóй сдвиг. Рассмотрим этот синфазный цикл при различных значениях параметра связи ε. При увеличении ε временнóй сдвиг Δt между синхронизованными орбитами уменьшается, а при установлении режима лаг-синхронизации он, как отмечалось выше, совпадает с временны́м запаздыванием между векторами состояний взаимодействующих осцилляторов. Важно отметить, что зависимость $\Delta t(\varepsilon)$ подчиняется степенному закону

$$\Delta t \sim \varepsilon^n \tag{2}$$

с показателем степени $n = -1$ во всем диапазоне изменения параметра связи ε, в котором существует седловой синфазный резонансный цикл $2:2$. Иными словами, данная зависимость справедлива и для режима синхронизации с запаздыванием, и для режима фазовой синхронизации. Аналогичное поведение наблюдается и для всех синфазных синхронизованных неустойчивых седловых орбит с другими тополо-

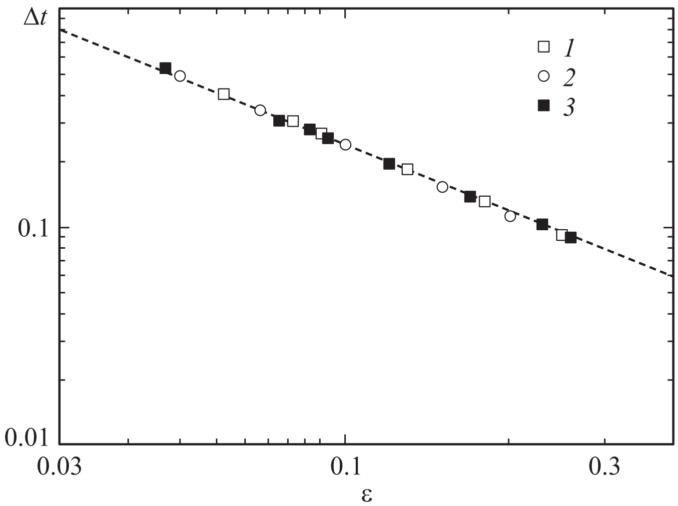

Рис. 2. Зависимость временнóго запаздывания Δt между синхронизованными седловыми периодическими орбитами в связанных системах (1) от величины параметра связи ε. *1* — соответствуют седловым периодическим орбитам с топологическим периодом $m = 1$, *2* — орбитам с топологическим перидом $m = 2$, *3* — $m = 3$. Прямая линия соответствует степенному закону $\Delta t \sim \varepsilon^n$ с показателем степени $n = -1$.

гическими периодами m. Особо следует отметить, что время запаздывания $\Delta t(\varepsilon)$ оказывается одинаковым для всех седловых синфазных циклов, независимо от их топологического периода m.

Рис. 2 показывает в двойном логарифмическом масштабе зависимость временнóго сдвига Δt между синхронизованными неустойчивыми синфазными седловыми орбитами с топологическими периодами $m = 1$ (*1*), $m = 2$ (*2*) и $m = 3$ (*3*) от величины параметра связи ε. Отчетливо видно, что во-первых, зависимость временнóго сдвига Δt между неустойчивыми периодическими траекториями в первой и второй связанных системах от параметра связи ε подчиняется степенному закону (2) с показателем степени $n = -1$, независимо от топологического периода цикла. На рис. 2 для простоты показаны результаты только для трех седловых синфазных циклов с наименьшими топологическими периодами m, однако временнóй сдвиг для циклов с более высокими топологическими периодами ведет себя точно таким же образом. Во-вторых, видно, что временнóй сдвиг $\Delta t(\varepsilon)$ оказывается при фиксированных значениях параметра связи ε одинаковым для всех синхронизованных синфазных орбит.

Таким образом, в настоящей работе на примере двух взаимодействующих систем Ресслера рассмотрен временнóй сдвиг между синхронизованными синфазными неустойчивыми седловыми орбитами, встроенными в хаотические аттракторы связанных осцилляторов. Показано, что зависимость временнóго сдвига между этими орбитами от параметра связи ε оказывается одинаковой для всех циклов, независимо от их топологического периода и выражается степенным законом с показателем степени „минус единица".

Важно отметить, что полученные результаты очень хорошо согласуются с выводами работы [13], в которой рассматривался вопрос о фазовом (временнóм) сдвиге между синхронизованными спектральными компонентами фурье-спектров взаимно связанных хаотических осцилляторов при установлении режима лаг-синхронизации. В то же время вопрос о взаимосвязи поведения спектральных компонент фурье-спектра с динамикой седловых орбит, встроенных в хаотический аттрактор, является предметом дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Программы поддержки ведущих научных школ РФ, научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика" при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC–006 of U. S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)), а также Фонда некоммерческих программ „Династия" и Международного центра фундаментальной физики (г. Москва).

Список литературы

[1] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
[2] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
[3] *Elson R.C.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81 (25). P. 5692–5695.

[4] *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
[5] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79 (7). С. 391–395.
[6] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Chaos. 2004. V. 14 (3). P. 603–610.
[7] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
[8] *Cvitanović P.* // Physica. D 51. P. 138–151.
[9] *Rulkov N.F.* // Chaos. 1996. V. 6. P. 262–279.
[10] *Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79 (1). P. 47–50.
[11] *Pikovsky A., Zaks M., Rosenblum M., Osipov G., Kurths J.* // Chaos. 1997. V. 7 (4). P. 680–687.
[12] *Pazó D., Zaks M., Kurths J.* // Chaos. 2002. V. 13. P. 309–318.
[13] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80 (1). С. 25–28.
[14] *Rosenblum M.G.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89 (26). P. 264102.
[15] *Schmelcher P., Diakonos F.K.* // Phys. Rev. 1998. E 57. P. 2739–2746.
[16] *Pingel D., Schmelcher P., Diakonos F.K.* // Phys. Rev. 2001. E 64 (2). P. 026214.