

01;03

## Влияние границы на перемешивание и транспорт пассивной примеси в нестационарном потоке

© К.В. Кошель, Д.В. Степанов

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева  
Дальневосточного отделения РАН, Владивосток

Поступило в Редакцию 9 августа 2004 г.

Рассматривается простейшая модель точечного топографического вихря, расположенного рядом с прямолинейной границей в нестационарном набегающем потоке. Используя численные эксперименты, обнаружен новый тип поведения траекторий, не проявляющийся в отсутствии границы. Предложен критерий по выявлению таких траекторий.

**1. Введение.** В настоящее время широким классом моделей, проявляющих хаотические свойства, является класс гамильтоновых систем с  $3/2$  степенями свободы. Под хаосом здесь и далее понимается экспоненциально быстрое разбегание двух изначально близко расположенных траекторий [1]. В геофизической гидродинамике это явление получило название „хаотическая адвекция“ [2].

Относительная простота гамильтоновых систем позволяет использовать их для описания, по крайней мере, качественного поведения реальных моделей в геофизической гидродинамике. Однако необходимо, чтобы функция тока удовлетворяла каким-либо динамическим соотношениям, т.е. была динамически согласованной. С помощью теории фоновых течений [3] удается построить такую функцию тока.

Используя динамически согласованную функцию тока и аппарат теории динамических систем, проводились исследования особенностей хаотического поведения жидких частиц в моделях топографического вихря соответственно эллиптической [4] и гауссовой [5] форм в нестационарном набегающем потоке. Механизм хаотического перемешивания в модели точечного вихря исследовался в работе [6].

В работе [7] рассматривался точечный топографический вихрь в нестационарном набегающем потоке, расположенный рядом с прямолинейной границей. Эта модель эквивалентна модели с двумя стаци-

онарными точечными вихрями в неограниченной области. Используя вариант теории возмущений, предложенный в [8], обнаружено, что толщина стохастического слоя возрастает с увеличением влияния границы.

В представленной статье используется модель точечного топографического вихря в нестационарном набегающем потоке, расположенного рядом с прямолинейной границей [7]. С помощью численных экспериментов будет показано, как граница влияет на поведение жидких частиц в нестационарном набегающем потоке.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим поле течения несжимаемой невязкой жидкости, индуцированное топологическим точечным вихрем, расположенным рядом с прямолинейной границей. В безразмерном виде функция тока и система уравнений адвекции частиц пассивной примеси имеют вид [7]:

$$\Psi = -W(t)y + \ln\left(\frac{x^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2}\right),$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} = W(t)y - 4\left(\frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 + (y+1)^2)(x^2 + (y-1)^2)}\right), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\left(\frac{8yx}{(x^2 + (y+1)^2)(x^2 + (y-1)^2)}\right), \end{cases} \quad (1)$$

где  $W(t)$  — скорость набегающего потока,  $x, y, t$  — безразмерные координаты и время, центр подводной горы, которая порождает вихрь, находится в точке с координатами  $(0, 1)$ .

При  $W(t) = \text{const}$  система (1) имеет в зависимости от величины скорости набегающего потока одну эллиптическую и одну или две гиперболические особые точки [7]. Фазовое пространство разделено сепаратрисой на две области: финитного (вихревая область (ВО)) и инфинитного (проточная область (ПО)) движения. Частицы, находящиеся в ВО, не могут проникнуть в ПО, и наоборот.

При малом периодическом возмущении скорости набегающего потока картина фазового пространства системы (1) существенно меняется: в зависимости от начальных условий траектории жидких частиц могут иметь (проявлять) хаотическое поведение. В окрестности невозмущенной сепаратрисы образуется стохастический слой, в котором происходит обмен частицами примеси между ВО и ПО. В работе [8] было показано, что толщина стохастического слоя в окрестности гиперболической точки пропорциональна корню квадратному из возмущения.

С ростом влияния границы толщина слоя увеличивается и становится пропорциональной корню кубическому из возмущения [7]. Но, как будет показано ниже, увеличение толщины стохастического слоя — это не единственная особенность, к которой приводит наличие прямолинейной границы.

**3. Численные эксперименты.** Численное моделирование проводилось с использованием метода Булеша—Штерра с модифицированным шагом [9]. Набегающий поток задавался в виде

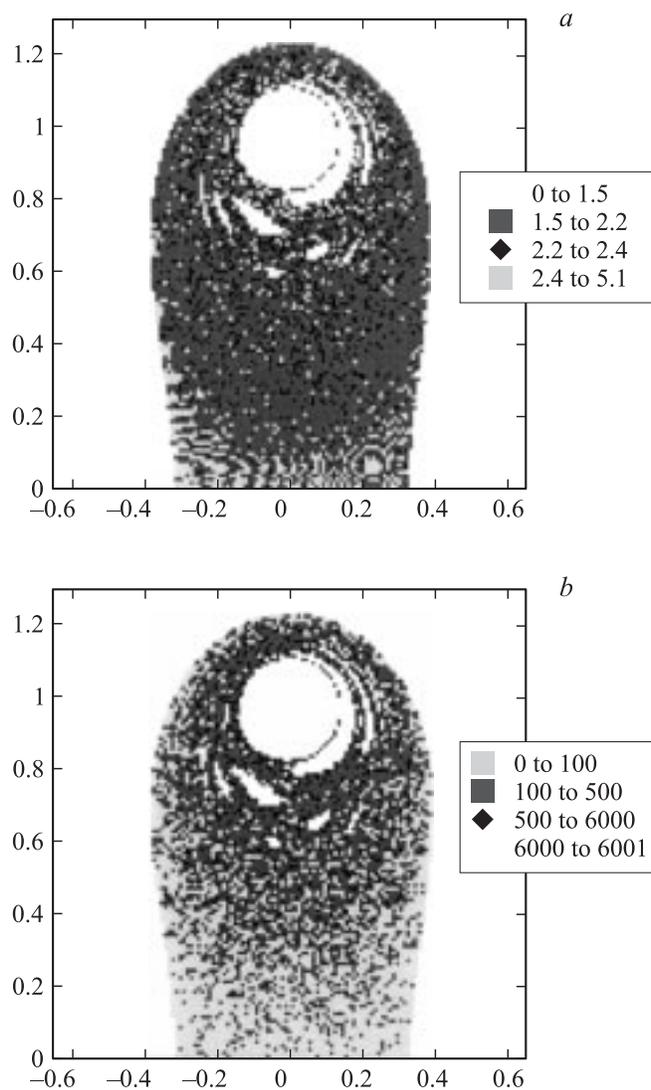
$$W(t) = W_0(1 - \delta \sin(\omega t)),$$

где  $\delta = 0.1$ , а средняя скорость набегающего потока  $W_0 = 3.6$  соответствует случаю сильного влияния границы. В начальный момент времени в ВО равномерно располагаются 8250 маркеров. В силу того что в малой окрестности центра вихря жидкие частицы двигаются регулярно, в расчет не принимались начальные условия  $(x_0, y_0)$ , расположенные в окрестности  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leq 0.05$ .

Прежде всего был проведен эксперимент по определению частоты набегающего потока, при которой количество маркеров, вымытых из ВО, максимальное. Маркер считался вымытым из ВО, если его траектория пересекала прямую  $x = 2.0$ . Интервал интегрирования выбирался равным  $t = 80000.0$ , после которого маркеры прекращают покидать ВО. При средней скорости набегающего потока  $W_0 = 3.6$  оптимальная частота  $\omega = 75.0$ .

В качестве количественной характеристики степени хаотичности естественно принять величину расходимости изначально близкорасположенных траекторий, т.е. показатель Ляпунова. Однако в силу открытости рассматриваемой системы вычислить показатель Ляпунова не представляется возможным, поэтому рассчитывался показатель Ляпунова, накопленный за конечный промежуток времени, или накопленный показатель Ляпунова [5]. Наряду с этим вычислялось время нахождения маркера в ВО. Интервал интегрирования выбирался равным  $t = 6000.0$ , так как к этому времени ВО покидает большая часть маркеров с хаотическим поведением.

На рис. 1 представлены распределения накопленного показателя Ляпунова (сверху) и времени жизни (снизу), приведенные к начальному положению. В зависимости от начальных условий траектории маркеров могут иметь различное поведение. Во-первых, это регулярные траектории. Они располагаются в островах регулярного поведения, имеют



**Рис. 1.** Распределение накопленного показателя Ляпунова (*a*) и времени жизни (*b*), приведенные к начальному положению маркеров, при  $W_0 = 3.6$  и  $\omega = 75.0$ .

Зависимость числа маркеров, имеющих значение  $\alpha$  больше наперед заданного для соответственно сильного  $W_0 = 3.6$  и слабого  $W_0 = 4.6$  влияния границы

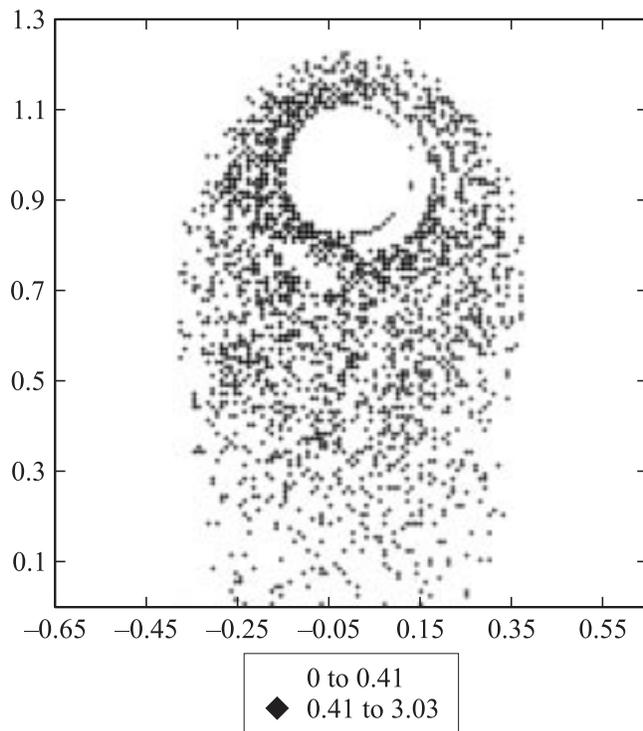
$\alpha$	$W_0 = 3.6$	$W_0 = 4.6$
0.1	3991	287
0.41	1932	1
1.0	532	0
3.03	1	0

маленький накопленный показатель Ляпунова. Во-вторых, это траектории, которые очень быстро покидают ВО. Они имеют малое время жизни и большой накопленный показатель Ляпунова. Третий тип — это траектории, которые в начальный момент времени проявляют хаотическое поведение, а затем захватываются какой-либо регулярной структурой или наоборот. Они имеют промежуточный накопленный показатель Ляпунова и относительно большое время жизни.

Однако с ростом влияния границы появляются траектории, поведение которых не подходит ни под один из вышеперечисленных сценариев. Это четвертый тип траекторий, которые наряду с большим временем жизни имеют большой накопленный показатель Ляпунова.

Для идентификации таких траекторий была вычислена еще одна характеристика степени хаотичности, а именно максимальное расстояние  $dy$  между двумя последовательными пересечениями траекторий оси  $Oy$  при  $y < 1$ . Используя три характеристики: время жизни, накопленный показатель Ляпунова и  $dy$ , для каждого маркера была вычислена величина  $\alpha = \frac{t}{T} \frac{\lambda}{\lambda^*} dy$ , где  $T$  — интервал времени, на котором происходит интенсивное вымывание частиц пассивной примеси из ВО,  $\lambda^*$  — среднее значение накопленного показателя Ляпунова по всем маркерам.

В таблице представлена зависимость числа маркеров, имеющих значение  $\alpha$  больше заданного для значений  $W_0 = 4.6$ ;  $3.6$ . Очевидно принять максимальное значение величины  $\alpha = 0.41$  при  $W_0 = 4.6$  (слабое влияние границы) за критерий для определения траекторий четвертого типа. Тогда число частиц, имеющих четвертый тип поведения, для случая  $W_0 = 3.6$  составляет порядка 23.4% от общего числа маркеров.



**Рис. 2.** Распределение величины  $\alpha$  для  $W_0 = 3.6$  и  $\omega = 75.0$ , приведенное к начальному положению.

Рис. 2 демонстрирует распределение величины  $\alpha$ , приведенное к начальному положению маркеров для  $W_0 = 3.6$ . Исходя из распределения, можно заключить, что начальные положения траекторий четвертого типа располагаются по всей ВО, однако область начальных данных для таких маркеров не сплошная, т. е. в любой окрестности маркера с таким поведением имеются маркеры как второго, так и третьего типа, а ближе к островам регулярного поведения первых резонансов еще и первого типа.

**4. Заключение.** В работе была рассмотрена гамильтонова система с  $3/2$  степенями свободы, описывающая движение частиц несжимаемой

невязкой жидкости в нестационарном потоке, набегающем на точечный вихрь, расположенный рядом с прямолинейной границей.

Обнаружено, что с ростом влияния границы появляются траектории, которые имеют продолжительное время жизни и большой накопленный показатель Ляпунова. Траектория такого типа попеременно прилипает то к одному, то к другому острову регулярного поведения и замирает достаточно большую площадь ВО фазового пространства. Подобное поведение траекторий частиц характерно для моделей закрытого типа [10]. Отметим, что четвертый тип поведения траекторий не был обнаружен в моделях [4–6]. Это говорит о том, что граница не только влияет на хаотические свойства траекторий, но и порождает новый тип поведения траекторий.

Авторы выражают благодарность В.В. Новотрясову за полезные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03–05–65214) и ДВО РАН (проекты 03–3–А–07–080 и 03–3–Ж–07–077).

## Список литературы

- [1] *Ottino J.M.* The kinematic of mixing: stretching, chaos and transport. N.Y.: Cambridge University Press, 1989. 364 p. Reprinted 1997.
- [2] *Aref H.* // J. Fluid Mech. 1984. V. 143. P. 1–21.
- [3] *Козлов В.Ф.* // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31. № 2. С. 245–250.
- [4] *Izrail'sky Yu.G., Kozlov V.F., Koshel K.V.* // Phys. Fluids. 2004. V. 16. N 8. P. 3173–3190.
- [5] *Козлов В.Ф., Кошель К.В.* // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37. № 3. С. 378–389.
- [6] *Будянский М.В., Пранц С.В.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 12. С. 51–56.
- [7] *Козлов В.Ф., Кошель К.В., Степанов Д.В.* // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 89–98.
- [8] *Гледзер А.Е.* // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. № 6. С. 838–845.
- [9] *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to numerical analysis. Second edition. N.Y.: Springer-Verlag, 1976. 672 p.
- [10] *Fotis Sotiropoulos, Yiannis Ventikos, Tahirih C. Lackey* // J. Fluid Mech. 2001. V. 444. P. 257–297.