

01;09

## Определение параметров уравнения Икеды по зашумленному временному ряду

© В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 30 сентября 2004 г.

Предложена процедура определения всех параметров дифференциального уравнения с запаздыванием Икеды, моделирующего динамику пассивного оптического резонатора, по временному ряду динамической переменной. Продемонстрирована возможность восстановления нелинейной функции и параметров уравнения Икеды даже при наличии высокого уровня шума.

При моделировании пространственно-развитых систем с обратной связью необходимо учитывать, что сигналы распространяются с конечной скоростью и им требуется время на преодоление расстояний. Поэтому оптические системы с запаздывающей обратной связью, как активные, так и пассивные, обычно моделируются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Например, для описания динамики пассивного оптического резонатора используется уравнение Икеды [1,2]

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \mu \sin(x(t - \tau_0) - x_0), \quad (1)$$

где переменная  $x$  характеризует сдвиг фазы электрического поля в нелинейной поглощающей среде кольцевого резонатора,  $x_0$  — постоянный фазовый сдвиг,  $\mu$  пропорционально интенсивности лазерного излучения, подаваемого на вход резонатора, а  $\tau_0$  — время распространения света в кольцевом резонаторе. Отметим, что уравнение Икеды стало эталонной моделью, широко используемой при исследовании сложной динамики систем с запаздыванием.

В данной работе нами продемонстрирована возможность восстановления уравнения Икеды (1) по временному ряду динамической переменной. Задача восстановления нелинейных динамических моделей систем с запаздывающей обратной связью по их хаотическим временным рядам

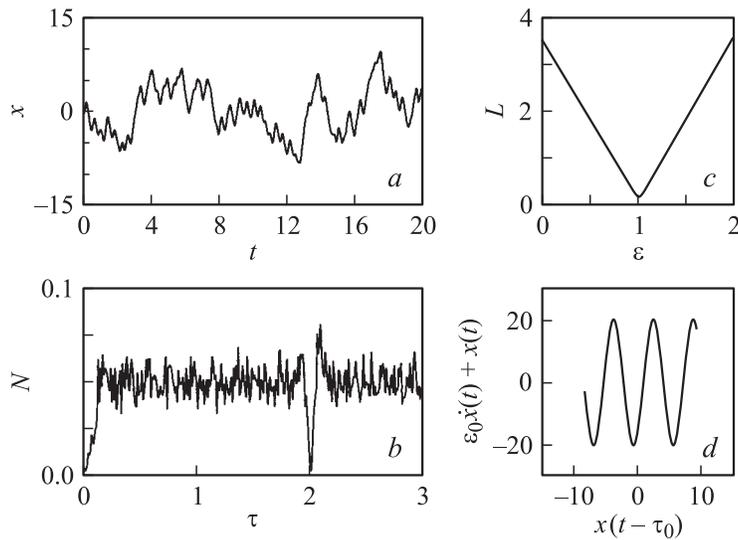
привлекает к себе в последние годы большое внимание. Так как системы с запаздыванием обладают бесконечно большим числом степеней свободы и могут демонстрировать хаотические движения очень высокой размерности [3], использование стандартных методов реконструкции систем по временному ряду не приводит к успеху и для восстановления систем с запаздыванием разрабатываются специальные приемы [4–13]. Большинство из них основаны на проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в подпространства малой размерности. При этом используются такие критерии качества реконструкции системы с запаздыванием, как минимальная ошибка прогноза построенной модели [4–7], минимальная величина информационной энтропии [8] или различные меры сложности спроецированного временного ряда [9–13].

Уравнение Икеды (1) относится к широкому классу систем с запаздыванием, описываемых дифференциальным уравнением с запаздыванием первого порядка

$$\varepsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0)), \quad (2)$$

где  $f$  — нелинейная функция, а  $\varepsilon_0$  — параметр, характеризующий инерционные свойства системы. Для уравнения (1)  $f = \mu \sin(x(t - \tau_0) - x_0)$  и  $\varepsilon_0 = 1$ . Используемые нами значения параметров  $\mu = 20$ ,  $\tau_0 = 2$ ,  $x_0 = \pi/3$  соответствовали движению системы (1) на хаотическом аттракторе высокой размерности [2]. На рис. 1, *a* приведен фрагмент временного ряда уравнения Икеды. Масштабы таковы, что 200 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки  $\tau_0 = 2$ . Весь ряд состоял из 20 000 точек и содержал около 1100 экстремумов.

Для восстановления времени задержки  $\tau_0$  по наблюдаемой реализации  $x(t)$  уравнения Икеды воспользуемся методом, предложенным нами в работе [14], в которой было показано, что во временной реализации систем с запаздыванием вида (2) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на  $\tau_0$ . Подсчитав число  $N$  одновременных обращений в нуль  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau)$  для различных значений  $\tau$ , перебираемых с шагом, равным шагу интегрирования  $h = 0.01$ , построим зависимость  $N(\tau)$  (рис. 1, *b*). Для оценки производной  $\dot{x}(t)$  по временному ряду мы использовали локальную параболическую аппроксимацию. Абсолютный минимум  $N(\tau)$  наблюдается при  $\tau = \tau_0 = 2.00$ , что в точности соответствует времени запаздывания. Отметим, что такой метод определения времени запаздывания обладает высоким быстродействием,



**Рис. 1.** *a* — временная реализация уравнения Икеды (1). *b* — число  $N$  пар экстремумов во временной реализации, удаленных друг от друга на время  $\tau$ , в зависимости от величины  $\tau$ .  $N(\tau)$  нормировано на общее число экстремумов во временном ряду.  $N_{\min}(\tau) = N(2.00)$ . *c* — длина  $L$  линии, соединяющей упорядоченные по величине  $x(t - \tau_0)$  точки на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon \dot{x}(t) + x(t))$ , в зависимости от  $\varepsilon$ .  $L(\varepsilon)$  нормирована на число точек.  $L_{\min}(\varepsilon) = L(1.00)$ . *d* — восстановленная нелинейная функция.

поскольку использует только операции сравнения и сложения, не требуя вычисления каких-либо мер сложности движения [9–13] или ошибки аппроксимации данных [4–7].

Для определения по хаотической временной реализации параметра инерционности  $\varepsilon_0$  и нелинейной функции  $f$  запишем уравнение (2) в виде

$$\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t) = f(x(t - \tau_0)). \quad (3)$$

Таким образом, если построить на плоскости множество точек с координатами  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$ , то оно воспроизведет функцию  $f$ . Поскольку заранее величина  $\varepsilon_0$  неизвестна, будем строить зависимости  $\varepsilon \dot{x}(t) + x(t)$  от  $x(t - \tau_0)$  для различных значений  $\varepsilon$ , добиваясь одно-

значной зависимости на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon \dot{x}(t) + x(t))$ , которая возможна лишь при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске  $\varepsilon_0$  будем использовать минимальную длину линии  $L(\varepsilon)$ , соединяющей точки на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon \dot{x}(t) + x(t))$ , упорядоченные по величине координаты  $x(t - \tau_0)$ . При построении зависимости  $L(\varepsilon)$  (рис. 1, *c*) шаг изменения  $\varepsilon$  выбирался равным 0.01. Минимум  $L(\varepsilon)$  наблюдается точно при  $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1.00$ . Построенное при этом значении множество точек на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$  (рис. 1, *d*), с хорошей точностью воспроизводит нелинейную функцию уравнения (1). Отметим, что в отличие от других методов, использующих для восстановления нелинейной функции только экстремальные точки или точки, удовлетворяющие определенным условиям [10,11], предлагаемый нами подход использует все точки временного ряда. Это позволяет по коротким временным рядам более полно восстанавливать нелинейную функцию даже в случаях слаборазвитого хаоса. Например, для построения  $L(\varepsilon)$  и восстановления мультимодальной функции  $f$  мы использовали лишь 2000 точек временного ряда.

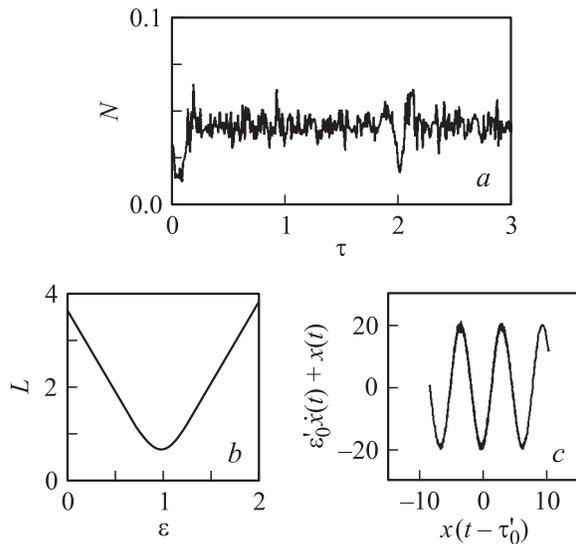
Параметр  $\mu$  уравнения Икеды может быть приближенно оценен по амплитуде синусоиды на графике восстановленной нелинейной функции (рис. 1, *d*). Параметр  $x_0$  может быть найден по формуле

$$x_0 = -\arcsin\left(\frac{\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t)}{\mu}\right), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t)$  — значение восстановленной функции при  $x(t - \tau_0) = 0$ .

Для более точного определения параметров  $\mu$  и  $x_0$  мы провели полиномиальную аппроксимацию восстановленной функции  $f$ . Оценка параметров  $\mu$  и  $x_0$  с точностью до одного процента достигается при использовании полинома степени 15 и выше. При аппроксимации восстановленной нелинейной функции полиномом 20-й степени мы получили  $\mu = 19.94$  и  $x_0 = 1.046$  ( $\pi/3 \approx 1.047$ ).

Для оценки возможностей метода при наличии возмущений мы применили его к рядам, полученным при добавлении к временному ряду уравнения (1) гауссовского белого шума с нулевым средним значением. На рис. 2 приведены результаты восстановления уравнения Икеды для случая, когда добавленный шум имел среднеквадратичное отклонение, составляющее 20% от среднеквадратичного отклонения исходного ряда. Положение минимума  $N(\tau)$  (рис. 2, *a*) позволило нам



**Рис. 2.** Восстановление уравнения Икеды в присутствии 20% аддитивного гауссовского белого шума: *a* — зависимость  $N(\tau)$ .  $N_{\min}(\tau) = N(2.00)$ . *b* — зависимость  $L(\epsilon)$ .  $L_{\min}(\epsilon) = L(0.98)$ . *c* — восстановленная нелинейная функция.

точно восстановить время запаздывания  $\tau'_0 = 2.00$ , а положение минимума  $L(\epsilon)$  (рис. 2, *b*) — получить близкую оценку параметра инерционности  $\epsilon'_0 = 0.98$ . Восстановленная при найденных  $\tau'_0$  и  $\epsilon'_0$  нелинейная функция изображена на рис. 2, *c*. Несмотря на достаточно высокий уровень шума и неточность определения  $\epsilon_0$ , качество восстановления нелинейной функции достаточно хорошее, существенно лучше, чем в работе [15], использующей при тех же значениях параметров уравнения Икеды метод оптимальных преобразований, требующий больших вычислительных затрат. Аппроксимация восстановленной нелинейной функции (рис. 2, *c*) полиномом 20-й степени позволила нам получить следующую оценку параметров:  $\mu = 19.38$  и  $x_0 = 1.048$ .

Итак, нами проведено восстановление параметров уравнения Икеды по временному ряду с помощью метода, основанного на статистическом анализе временных интервалов между экстремумами ряда и проецировании бесконечномерного фазового пространства системы Икеды (1) в

специальным образом выбранные двумерные подпространства. Метод позволяет обеспечить высокое качество восстановления нелинейной функции и параметров уравнения Икеды даже в присутствии шума достаточно высокого уровня.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 03–02–17593, CRDF, Award No. REC–006 и INTAS, грант № 03–55–920.

## Список литературы

- [1] Ikeda K. // Opt. Commun. 1979. V. 30. P. 257–261.
- [2] Ikeda K., Matsumoto K. // Physica D. 1987. V. 29. P. 223–235.
- [3] Farmer J.D. // Physica D. 1982. V. 4. P. 366–393.
- [4] Fowler A.C., Kember G. // Phys. Lett. A. 1993. V. 175. P. 402–408.
- [5] Hegger R., Büchner M.J., Kantz H., Giaquinta A. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 558–561.
- [6] Zhou C., Lai C.-H. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. N 1. P. 320–323.
- [7] Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L. et al. // Phys. Lett. A. 2003. V. 308. P. 54–60.
- [8] Tian Y.-C., Gao F. // Physica D. 1997. V. 108. P. 113–118.
- [9] Kaplan D.T., Glass L. // Physica D. 1993. V. 64. P. 431–454.
- [10] Büchner M.J., Popp M., Meyer Th. et al. // Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 345–349.
- [11] Büchner M.J., Popp M., Meyer Th. et al. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3082–3085.
- [12] Büchner M.J., Meyer Th., Kittel A., Parisi J. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 5083–5089.
- [13] Büchner M.J., Ciofini M., Giaquinta A. et al. // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 165–176.
- [14] Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. 056216.
- [15] Voss H., Kurths J. // Chaos, Solitons and Fractals. 1999. V. 10. P. 805–809.