01;05.1

Распространение плоских волн поля дефектов в вязкоупругой среде

© *Н.В. Чертова, М.А. Чертов*

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Поступило в Редакцию 18 октября 2004 г.

Рассмотрены волновые решения системы уравнений полевой теории дефектов в вязкоупругой среде. Определены показатели преломления и поглощения, скорости распространения волн упругого континуума и континуума дефектов. Проанализированы особенности корреляции различных волн.

В ранее опубликованных работах [1–3] на основе системы уравнений полевой теории дефектов

$$B\frac{\partial}{\partial x_i}I_{ij} = -P_j, \qquad e_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}I_{lj} = \frac{\partial}{\partial t}\alpha_{ij},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_{ki} = 0, \qquad Se_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_{lj} = -B\frac{\partial}{\partial t}I_{ij} - \sigma_{ij}, \tag{1}$$

были исследованы закономерности распространения плоских волн поля дефектов в однородной вязкопластической среде, определяемой уравнением

$$\sigma_{ij} = \theta_{ijkl}I_{kl}, \tag{2}$$

и при наличии границ раздела. В приведенных выражениях (1), (2) α_{ij}, I_{ij} — тензоры плотности и плотности потока дислокаций; σ_{ij}, P_j — эффективные напряжения и импульс; θ_{ijkl} — тензор коэффициентов вязкости; B, S — константы теории. Проведем аналогичные исследования для вязкоупругих сред [4], определяемых уравнением

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^{v}. \tag{3}$$

Здесь σ_{ij}^{el} — упругие, σ_{ij}^{v} — вязкие напряжения, которые выражаются известным образом через компоненты вектора смещений U_i, тензор упругих модулей C_{ijkl} и тензор коэффициентов вязкости η_{ijkl} [5]

$$\sigma_{ij}^{el} = C_{ijkl}\partial_k U_l, \quad \sigma_{ij}^{v} - \eta_{ijkl}\partial_k V_l. \tag{4}$$

Импульс среды находится следующим образом:

$$P_i = \rho V_i = \rho \frac{\partial}{\partial t} U_i, \tag{5}$$

где ρ — плотность. Уравнения (1) удовлетворяют условию совместности

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ki}, \tag{6}$$

которое является уравнением динамического равновесия. Рассмотрим решения (1), (3)–(5) в виде

$$\{\alpha_{ij}(r,t), I_{ij}(r,t), U_i(r,t)\} = (\alpha_{ij}(x), I_{ij}(x), U_i(x)) \exp(-i\omega t), \tag{7}$$

полагая, что неизвестные величины зависят от одной координаты x. Для комплексных компонент $\alpha_{ij}(x)$, $I_{ij}(x)$, $U_i(x)$ указанная система уравнений (1), (3)–(5) запишется следующим образом:

$$B\partial_x I_{xj}(x) = i\omega\rho U_j(x), \tag{8.1}$$

$$i\omega\alpha_{xj}(x) = 0, \quad i\omega\alpha_{yi}(x) = \partial_x I_{zj}(x), \quad i\omega\alpha_{zj}(x) = -\partial_x I_{yj}(x), \tag{8.2}$$

$$\partial_x \alpha_{xj}(x) = 0, \tag{8.3}$$

$$i\omega B I_{xj}(x) - \sigma_{xj}(x) = 0, \quad i\omega B I_{yj}(x) - \sigma_{yj}(x) = -S\partial_x \alpha_{zj}(x),$$

$$i\omega B I_{zj}(x) - \sigma(x) = S\partial_x \alpha_{yj}(x). \tag{8.4}$$

В случае однородного изотропного тела, когда тензоры упругих модулей и коэффициентов вязкости имеют вид [5]

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il} + \delta_{jk}), \tag{9}$$

$$\eta_{ijkl} = \xi\delta_{ij}\delta_{kl} + \gamma(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il} + \delta_{jk}), \tag{10}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе, ξ, γ — объемная и сдвиговая вязкость, δ_{ij} — символы Кронекера, компоненты тензора напряжений (4)–(5) запишутся следующим образом:

$$\begin{array}{ccc}
(\lambda+2\mu)\partial_x U_x(x) + (\xi+2\gamma)\partial_x\partial_t U_x(x), & \mu\partial_x U_y(x) + \gamma\partial_x\partial_t U_y(x), & \mu\partial_x U_z(x) + \gamma\partial_x\partial_t U_z(x), \\
\mu\partial_x U_y(x) + \gamma\partial_x\partial_t U_y(x), & \lambda\partial_x U_x(x) + \xi\partial_x\partial_t U_x(x), & 0, \\
\mu\partial_x U_z(x) + \gamma\partial_x\partial_t U_z(x), & 0, & \lambda\partial_x U_x(x) + \xi\partial_x\partial_t U_x(x).
\end{array} \tag{11}$$

Используя первое соотношение (8.4), выражения для компонент тензора напряжений (11) и равенство (8.1) или (3)–(6) и (11), можно получить уравнения для определения компонент вектора смещений $U_i(x)$

$$\partial_x^2 U_x(x) + (\omega/C_1)^2 \Big/ \left(1 - \frac{i\omega(\xi + 2\gamma)}{\lambda + 2\mu}\right) U_x(x) = 0,$$

$$\partial_x^2 U_y(x) + (\omega/C_2)^2 / (1 - i\omega\gamma/\mu) U_y(x) = 0,$$
$$\partial_x^2 U_z(x) + (\omega/C_2)^2 / (1 + i\omega\gamma/\mu) U_z(x) = 0, \qquad (12)$$

где $C_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — продольная и поперечная скорости упругих волн. Решения (12) хорошо известны

$$U_x(x) = a_1 \exp(ik_1 x) + a_2 \exp(-ik_1 x),$$

$$U_y(x) = b_1 \exp(ik_2 x) + b_2 \exp(-ik_2 x),$$
$$U_z(x) = c_1 \exp(ik_2 x) + c_2 \exp(-ik_2 x). \qquad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$k_1^2 = (\omega/C_1)^2 \Big/ \left(1 - \frac{i\omega(\xi + 2\gamma)}{\lambda + 2\mu}\right), \quad k_2^2 = (\omega/C_2)^2 / (1 - i\omega\gamma/\mu); \quad (14)$$

a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — неизвестные константы, определяемые из граничных условий. Выражения (14) можно представить следующим образом:

$$k_1 = \omega(n_1 + i\chi_1)/C_1, \quad k_2 = \omega(n_2 + i\chi_2)/C_2, \qquad (15)$$

если ввести показатели преломления и поглощения (n_1, χ_1) и (n_2, χ_2) [6], связанные с величинами $\operatorname{tg}\delta_1 = \omega(\xi + 2\gamma)/(\lambda + 2\mu)$, $\operatorname{tg}\delta_2 = \omega\gamma/\mu$, называемыми тангенсами углов потерь,

$$n_1 = \left[\left((\operatorname{tg}^2\delta_1 + 1)^{1/2} + 1\right) / 2(\operatorname{tg}^2\delta_1 + 1)\right]^{1/2},$$

$$\chi_1 = \left[\left((\operatorname{tg}^2\delta_1 + 1)^{1/2} - 1\right) / 2(\operatorname{tg}^2\delta_1 + 1)\right]^{1/2}. \qquad (16)$$

Выражения для (n_2, χ_2) аналогичны. Показатели преломления (n_1, n_2) определяют фазовую скорость волн, показатели поглощения (χ_1, χ_2)

характеризуют скорость убывания амплитуды волны в направлении ее распространения [4,6].

Зная величины $U_i(x)$, можно определить из первого равенства (8.4) компоненты тензора плотности потока $I_{xj}(x)$

$$I_{xx}(x) = \left(C_1\rho \Big/ B\sqrt{n_1^2+\chi_1^2}\right)\left[a_1\exp(ik_1x) - a_2\exp(-ik_1x)\right]\exp(-i\chi_1/n_1),$$

$$I_{xy}(x) = \left(C_2\rho \Big/ B\sqrt{n_2^2+\chi_2^2}\right)\left[b_1\exp(ik_2x) - b_2\exp(-ik_2x)\right]\exp(-i\chi_2/n_2),$$

$$I_{xz}(x) = \left(C_2\rho \Big/ B\sqrt{n_2^2+\chi_2^2}\right)\left[c_1\exp(ik_2x) - c_2\exp(-ik_2x)\right]\exp(-i\chi_2/n_2). \tag{17}$$

Неизвестные $I_{yj}(x)$, $I_{zj}(x)$ получим, рассматривая совместно последние равенства (8.2) и (8.4),

$$-\omega^2 BI_{yj}(x) - i\omega\sigma_{yj}(x) = S\partial_x^2 I_{yj}(x),$$

$$-\omega^2 BI_{zj}(x) - i\omega\sigma_{zj}(x) = S\partial_x^2 I_{zj}(x).$$

Учитывая (11), перепишем эти уравнения следующим образом:

$$\partial_x^2 I_{yx}(x) + k_3^2 I_{yx}(x) = -\frac{i\omega}{S}(\mu - i\omega\gamma)\partial_x U_y(x) = -\frac{i\omega^3\rho}{Sk_2^2}\partial_x U_y(x),$$

$$\partial_x^2 I_{yy}(x) + k_3^2 I_{yy}(x) = -\frac{i\omega}{S}(\lambda - i\omega\xi)\partial_x U_x(x) = -\frac{i\omega^3\rho}{Sk_4^2}\partial_x U_x(x),$$

$$\partial_x^2 I_{yz}(x) + k_3^2 I_{yz}(x) = 0,$$

$$\partial_x^2 I_{zx}(x) + k_3^2 I_{zx}(x) = -\frac{i\omega}{S}(\mu - i\omega\gamma)\partial_x U_z(x) = -\frac{i\omega^3\rho}{Sk_2^2}\partial_x U_z(x),$$

$$\partial_x^2 I_{zy}(x) + k_3^2 I_{zy}(x) = 0,$$

$$\partial_x^2 I_{zz}(x) + k_3^2 I_{zz}(x) = -\frac{i\omega}{S}(\lambda - i\omega\xi)\partial_x U_x(x) = -\frac{i\omega^3\rho}{Sk_4^2}\partial_x U_x(x), \tag{18}$$

где $k_3^2 = (\omega/C_3)^2$, $C_3 = \sqrt{S/B}$, $k_4^2 = (\omega/C_4)^2/(1 - i\omega\xi/\lambda) = [\omega(n_4 + i\chi_4)/C_4]^2$, $C_4 = \sqrt{\lambda/\rho}$, $\operatorname{tg}\delta_4 = \omega\xi/\lambda$. Величины n_4, χ_4

находятся по формулам, аналогичным (16). Решения двух уравнений, подобных (12), известны

$$I_{yz}(x) = d_1 \exp(ik_3x) + d_2 \exp(-ik_3x),$$

$$I_{zy}(x) = f_1 \exp(ik_3x) + f_2 \exp(-ik_3x), \tag{19}$$

здесь d_1, d_2, f_1, f_2 — неизвестные константы. Решения остальных уравнений (18) будут содержать два слагаемых, одно из которых является решением однородного уравнения, другое — определяется видом функции в правой части уравнений

$$I_{yx}(x) = g_1 \exp(ik_3x) + g_2 \exp(-ik_3x) + \frac{\omega^3\rho}{Sk_2(k_3^2-k_2^2)}\big(b_1 \exp(ik_2x) - b_2 \exp(-ik_2x)\big),$$

$$I_{yy}(x) = h_1 \exp(ik_3x) + h_2 \exp(-ik_3x) + \frac{\omega^3\rho k_1}{Sk_4^2(k_3^2-k_1^2)}\big(a_1 \exp(ik_1x) - a_2 \exp(-ik_1x)\big),$$

$$I_{zx}(x) = q_1 \exp(ik_3x) + q_2 \exp(-ik_3x) + \frac{\omega^3\rho}{Sk_2(k_3^2-k_2^2)}\big(c_1 \exp(ik_2x) - c_2 \exp(-ik_2x)\big),$$

$$I_{zz}(x) = p_1 \exp(ik_3x) + p_2 \exp(-ik_3x) + \frac{\omega^3\rho k_1}{Sk_4^2(k_3^2-k_1^2)}\big(a_1 \exp(ik_1x) - a_2 \exp(-ik_1x)\big), \tag{20}$$

где g_1, g_2, h_1, h_2, q_1, q_2 и т. д. — константы.

Компоненты тензора плотности дислокаций $\alpha_{yj}(x)$, $\alpha_{zj}(x)$ можно получить на основе последних равенств (8.2)

$$\alpha_{yx}(x) = \big[q_1 \exp(ik_3x) - q_2 \exp(-ik_3x)\big]/C_3 + \frac{\omega^2\rho}{S(k_3^2-k_2^2)}\big[c_1 \exp(ik_2x) + c_2 \exp(-ik_2x)\big],$$

$$\alpha_{yy}(x) = \big[f_1 \exp(ik_3x) - f_2 \exp(-ik_3x)\big]/C_3,$$

$$\alpha_{yz}(x) = \left[p_1 \exp(ik_3x) - p_2 \exp(-ik_3x)\right]/C_3$$
$$+ \frac{\omega^2\rho k_1^2}{Sk_4^2(k_3^2 - k_1^2)}\left[a_1 \exp(ik_1x) + a_2 \exp(-ik_1x)\right],$$
$$\alpha_{zx}(x) = \left[g_2 \exp(-ik_3x) - g_1 \exp(ik_3x)\right]/C_3$$
$$- \frac{\omega^2\rho}{S(k_3^2 - k_2^2)}\left[b_1 \exp(ik_2x) + b_2 \exp(-ik_2x)\right],$$
$$\alpha_{zy}(x) = \left[h_2 \exp(-ik_3x) - h_1 \exp(-ik_3x)\right]/C_3$$
$$- \frac{\omega^2\rho k_1^2}{Sk_4^2(k_3^2 - k_1^2)}\left[a_1 \exp(ik_1x) + a_2 \exp(-ik_1x)\right],$$
$$\alpha_{zz}(x) = \left[d_2 \exp(-ik_3x) - d_1 \exp(ik_3x)\right]/C_3. \tag{21}$$

Из первого равенства (8.2) и (8.3) следует, что

$$\alpha_{xj}(x) = 0. \tag{22}$$

Таким образом, в вязкоупругой среде с дефектами распространяются плоские волны упругих смещений, тензора плотности дефектов и тензора плотности потока дефектов. Волны упругих смещений и „продольных“ компонент тензора плотности потока $I_{xj}(x,t)$ взаимосвязаны. Выражение „продольных“ компонент тензора в данной работе имеет тот смысл, что первый индекс величины совпадает с направлением распространения волны. Величины U_i, $I_{xj}(x,t)$ распространяются с одинаковыми скоростями, определяемыми показателями преломления и поглощения, а также скоростью звуковых волн (15). Амплитуды этих величин связаны коэффициентами

$$\theta_1 = C_1\rho\Big/\left(B\sqrt{n_1^2 + \chi_1^2}\right), \quad \theta_2 = C_2\rho\Big/\left(B\sqrt{n_2^2 + \chi_2^2}\right),$$

и существует разность фаз, определяемая соотношениями χ_1/n_1, χ_2/n_2.

Для слабо затухающих волн U_i, $I_{xj}(x,t)$, наблюдаемых при $\operatorname{tg}\delta_1 \ll 1$, $\operatorname{tg}\delta_2 \ll 1$, когда

$$n_1 = 1, \qquad \chi_1 = (\operatorname{tg}\delta_1)/2 = \omega(\xi + 2\gamma)/2(\lambda + 2\mu),$$
$$n_2 = 1, \qquad \chi_2 = (\operatorname{tg}\delta_2)/2 = \omega\gamma/2\mu,$$

отсутствует дисперсия, а диссипация частотно зависима. Для волн, испытывающих сильное затухание при $\operatorname{tg}\delta_1 \gg 1$, $\operatorname{tg}\delta_2 \gg 1$,

$$n_1 \approx \chi_1 = 1\Big/\sqrt{2(\operatorname{tg}\delta_1)} = 1\Big/\sqrt{2\omega(\xi + 2\gamma)/(\lambda + 2\mu)}\,,$$

$$n_2 \approx \chi_2 = 1\Big/\sqrt{2(\operatorname{tg}\delta_2)} = 1\Big/\sqrt{2\omega\gamma/\mu}\,,$$

т. е. имеют место дисперсия и диссипация, зависящая от частоты. При сильном затухании волновой процесс практически не реализуется, поскольку волны затухают на очень малых расстояниях по сравнению с длиной волны (λ_1, λ_2)

$$d_1 = C_1/\omega\chi_1 = \lambda_1/2\pi\chi_1, \quad d_2 = C_2/\omega\chi_2 = \lambda_2/2\pi\chi_2.$$

Волн „продольных" компонент тензора плотности дислокаций $\alpha_{xj}(x, t)$ не существует, что согласуется с выводами, ранее полученными в [2]. Волны „поперечных" компонент $I_{yi}(x, t)$, $I_{zi}(x, t)$, $\alpha_{zi}(x, t)$, $\alpha_{yi}(x, t)$, первый индекс которых перпендикулярен направлению распространения волны, представляют суперпозицию волн дислокационного ансамбля, распространяющихся со скоростью $C_3 = \sqrt{S/B}$, и волн, обусловленных полем упругих смещений (13). Исключением являются компоненты $I_{yz}(x, t)$, $I_{zy}(x, t)$, $\alpha_{yy}(x, t)$, $\alpha_{zz}(x, t)$, динамика которых не зависит от волн упругих смещений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01188).

Список литературы

[1] *Чертова Н.В., Гриняев Ю.В.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 18. С. 91–94.
[2] *Чертова Н.В.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 2. С. 83–87.
[3] *Чертова Н.В., Гриняев Ю.В.* // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 1. С. 115–125.
[4] *Ландау Л.Д., Лифашиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. Т. 7. Теоретическая физика.
[5] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976.
[6] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990.