05.2

Об эффективных электрических характеристиках трехмерной композитной проводящей среды

© С.В. Хорьков

Нижегородский государственный технический университет
E-mail: priem@nntu.nnov.ru

Поступило в Редакцию 20 декабря 2004 г.

Исследуются электрические характеристики трехмерного композита, составленного из материалов с сильно различающимися проводимостями σ_1 и σ_2. На пороге протекания определены квадратичные корреляторы полей и токов. Найдено распределение диссипируемой энергии по компонентам. Получена оценка нижнего значения критического индекса нелинейной эффективной проводимости.

В последние годы композиционные материалы являются объектом интенсивного изучения и использования. В качестве примеров таких сред можно назвать среды, созданные из смеси металла и диэлектрика, гранулярные материалы, композиты на основе металла и полимера и др. Такие неоднородные среды замечательны тем, что они могут обладать макроскопическими характеристиками, сильно отличающимися от свойств отдельных компонент.

Рассмотрим композит, приготовленный из смеси материалов с проводимостями σ_1 („металл“) и σ_2 („диэлектрик“). Будем считать, что размер неоднородностей в композите существенно превосходит длину свободного пробега, тогда плотность тока $\mathbf{j}$ и локальное электрическое поле $\mathbf{e}$ в каждой точке подчиняются закону Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}. \tag{1}$$

Далее полагается, что размеры образца таковы, что его проводимость σ_{eff} является величиной самоусредняющейся. Тогда для композита в целом закон Ома можно записать $\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_{eff} \langle \mathbf{e} \rangle$, где скобки $\langle \ldots \rangle$ обозначают усреднение по его объему. Линейная эффективная проводимость такого композита, находящегося на пороге протекания металл–диэлектрик, описывается универсальной функцией:

$$\sigma_{eff} = \sigma_1 h^s, \tag{2}$$

где $h = \sigma_2/\sigma_1$, а показатель степени s — критический индекс. В работе [1] определено точное значение индекса $s = 1/2$ при любых значениях параметра h ($0 \leqslant h \leqslant 1$) в двумерной среде. В трехмерном композите значение критического индекса определяется лишь в случае, когда $h \ll 1$: $s = 2/3$ [2,3]. Данное значение индекса s хорошо согласуется и с результатом численного эксперимента [4].

Будем интересоваться корреляторами полей и токов, которые определяют эффективные характеристики неоднородной среды. Найдем зависимость квадратичного коррелятора поля $\langle \mathbf{e}^2 \rangle$ от параметра h в трехмерном композите. По определению среднее значение квадрата поля равно

$$\langle \mathbf{e}^2 \rangle = \frac{\int\limits_V \mathbf{e}^2 dV}{V}, \tag{3}$$

где V — объем композита. Интегрирование в (3) по всей системе сводится к интегрированию по „металлической“ компоненте с проводимостью σ_1 и объемом V_1 и интегрированию по „диэлектрической“ компоненте с проводимостью σ_2 и объемом V_2. Таким образом,

$$\langle \mathbf{e}^2 \rangle = \frac{\int\limits_{V_1} \mathbf{e}_1^2 dV}{V} + \frac{\int\limits_{V_2} \mathbf{e}_2^2 dV}{V}. \tag{4}$$

Выражение (4) запишем через средние значения квадратов полей в различных компонентах, которые имеют вид $\langle \mathbf{e}^2 \rangle_1 = \frac{\int_{V_1} \mathbf{e}_1^2 dV}{V_1}$ и $\langle \mathbf{e}^2 \rangle_2 = \frac{\int_{V_2} \mathbf{e}_2^2 dV}{V_2}$:

$$\langle \mathbf{e}^2 \rangle = \frac{V_1}{V} \langle \mathbf{e}^2 \rangle_1 + \frac{V_2}{V} \langle \mathbf{e}^2 \rangle_2. \tag{5}$$

Полученное выражение справедливо при любых концентрациях материалов (компонентов), из которых приготовлен композит. Если мы находимся на пороге протекания, то из (5) следует

$$\langle \mathbf{e}^2 \rangle = p_c \langle \mathbf{e}^2 \rangle_1 + (1 - p_c) \langle \mathbf{e}^2 \rangle_2, \tag{6}$$

где $p_c = V_1/V$ — значение концентрации металлической компоненты, соответствующей порогу протекания. В результате численного моделирования в задаче связей на простой кубической решетке получено

$p_c = 0.247$ [5]. Общее выражение для эффективной линейной проводимости имеет вид

$$\sigma_{eff} = \langle \sigma \mathbf{e}^2 \rangle / \langle \mathbf{e} \rangle^2.$$

Используя свойство расщепления коррелятора $\langle \mathbf{j}\mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle \langle \mathbf{e} \rangle$ и привлекая теорему Телледжена [6], нетрудно получить

$$\delta\sigma_{eff} = \langle \delta\sigma \mathbf{e}^2 \rangle / \langle \mathbf{e} \rangle^2. \tag{7}$$

Запишем выражение (7) для двухкомпонентного композита на пороге протекания

$$\delta\sigma_{eff} = p_c \langle \delta\sigma_1 \mathbf{e}^2 \rangle_1 / \langle \mathbf{e} \rangle^2 + (1 - p_c) \langle \delta\sigma_2 \mathbf{e}^2 \rangle_2 / \langle \mathbf{e} \rangle^2. \tag{8}$$

Из (2) при $s = 2/3$ и (8) следует

$$p_c \langle \mathbf{e}^2 \rangle_1 = \langle \mathbf{e} \rangle^2 \frac{h^{2/3}}{3}, \quad (1 - p_c) \langle \mathbf{e}^2 \rangle_2 = \frac{2}{3} \langle \mathbf{e} \rangle^2 h^{-1/3}. \tag{9}$$

Используя (6) и (9) в режиме $h \ll 1$, запишем

$$\frac{\langle \mathbf{e}^2 \rangle}{\langle \mathbf{e} \rangle^2} = \frac{2}{3} h^{-1/3} + o(h^{2/3}). \tag{10}$$

Аналогично (6) для квадратичного коррелятора плотности тока имеем

$$\langle \mathbf{j}^2 \rangle = p_c \langle \mathbf{j}^2 \rangle_1 + (1 - p_c) \langle \mathbf{j}^2 \rangle_2.$$

Используя закон Ома и формулы (9) при $h \ll 1$, находим

$$\frac{\langle \mathbf{j}^2 \rangle}{\langle \mathbf{j} \rangle^2} = \frac{h^{-2/3}}{3} + o(h^{1/3}). \tag{11}$$

Подчеркнем, что в двумерной среде имеет место точное соотношение [1]:

$$\frac{\langle \mathbf{e}^2 \rangle}{\langle \mathbf{e} \rangle^2} = \frac{\langle \mathbf{j}^2 \rangle}{\langle \mathbf{j} \rangle^2} = \frac{1}{2} \left(h^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \right),$$

т. е. токи и поля флуктуируют одинаково. Как следует из выражений (10) и (11) в трехмерной случайной среде, корреляторы $\langle \mathbf{e}^2 \rangle$ и $\langle \mathbf{j}^2 \rangle$ имеют различную зависимость от параметра h.

Получим распределение диссипируемой энергии $q = \mathbf{je}$ по компонентам с разной проводимостью. Запишем $\langle q \rangle = p_c \langle q \rangle_1 + (1 - p_c)\langle q \rangle_2$. Используя соотношения (9) и выражение для локальной диссипации энергии $q = \sigma \mathbf{e}^2$, получаем

$$p_c \langle q \rangle_1 = \frac{\sigma_{eff}}{3} \langle \mathbf{e} \rangle^2, \qquad (1 - p_c)\langle q \rangle_2 = \frac{2\sigma_{eff}}{3} \langle \mathbf{e} \rangle^2. \tag{12}$$

Выражения (12) показывают, что теплота, выделяемая в системе, в отличие от двумерного случая распределена неоднородно. Плотность диссипируемой энергии в диэлектрической компоненте в два раза выше, чем в металлической.

Из-за хаотичности структуры среды, находящейся на пороге протекания металл–диэлектрик, электрическое поле $\mathbf{e}$ сильно флуктуирует и в некоторых областях композита может существенно превышать среднее поле $\langle \mathbf{e} \rangle$. Это видно, например, из выражения (10). Вследствие этого в этих областях электронный газ может сильно разогреваться и приводить к нарушению линейной связи между током и полем (1). Имеется большое число экспериментальных работ, в которых наблюдалось усиление нелинейного отклика в неоднородных проводящих средах, находящихся вблизи перколяционного перехода, например [8–12].

Определим нижнюю границу критического индекса нелинейной эффективной проводимости χ_{eff}. Следуя работе [7], запишем

$$\chi_{eff} = \frac{\langle \chi \mathbf{e}^4 \rangle}{\langle \mathbf{e} \rangle^4}, \tag{13}$$

где χ — локальная нелинейная проводимость, принимающая значение χ_1 и χ_2 в разных компонентах, а χ_{eff} определяется как коэффициент разложения среднего тока $\langle \mathbf{j} \rangle$ по полю $\langle \mathbf{e} \rangle$:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_{eff} \langle \mathbf{e} \rangle + \chi_{eff} \langle \mathbf{e} \rangle^2 \langle \mathbf{e} \rangle \ldots$$

Используя соотношение (13), выразим среднее по системе через средние по компонентам

$$\chi_{eff} = \frac{\chi_1 p_c \langle \mathbf{e}^4 \rangle_1}{\langle \mathbf{e} \rangle^4} + \frac{\chi_2 (1 - p_c)\langle \mathbf{e}^4 \rangle_2}{\langle \mathbf{e} \rangle^4}.$$

К сожалению, точного аналитического выражения для корреляторов $\langle \mathbf{e}^4 \rangle_1$, $\langle \mathbf{e}^4 \rangle_2$ найти не удается. Однако принимая во внимание, что

$\langle \mathbf{e}^4 \rangle_i \geqslant \langle \mathbf{e}^2 \rangle_i^2$, и используя (10), получаем

$$\chi_{eff} \geqslant \frac{4}{9} \frac{\chi_2}{(1-p_c)} h^{-2/3}. \qquad (14)$$

Как и в двумерном случае, определим критический индекс нелинейной эффективной проводимости ε соотношением

$$\chi_{eff} \propto h^{-\varepsilon}. \qquad (15)$$

Сопоставляя (14) и (15), определяем наименьшее значение ε: $\varepsilon_{\min} = \frac{2}{3}$. Отметим, что в двумерной случайно-неоднородной среде $\varepsilon = 1.33$ [13].

Список литературы

[1] *Дыхне А.М.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 110–115.
[2] *Kazakov V.A., Satanin A.M.* // Phys. Stat. Sol. 1981. V. B108. P. 19–28.
[3] *Архинчеев В.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 50. С. 293–295.
[4] *Балагуров Б.Я., Кашин В.А.* // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. С. 1001–1017.
[5] *Straley J.P.* // Phys. Rev. 1973. V. 15. P. 5733–5738.
[6] *Пенфилд П., Спейс Р., Дюинкер С.* Энергетическая теория электрических цепей. М.: Энергия, 1974. С. 151.
[7] *Stroud D., Hui P.M.* // Phys. Rev. 1988. V. B37. P. 8719–8724.
[8] *Dubson M.A., Hui Y.C., Weissman M.B.* et al. // Phys. Rev. 1989. V. B39. P. 6807–6815.
[9] *Yagil Y., Deutcher G., Bergman D.J.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 1423–1426.
[10] *Yagil Y., Deutscher G.* // Phys. Rev. 1992. V. B46. P. 16115–16121.
[11] *Gefen Y., Shin W.H., Laibowitz R.B.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 3097–3100.
[12] *Chakrabarty R.K., Bardhan K.K., Basu A.* // Phys. Rev. 1991. V. B44. P. 6773–6779.
[13] *Сатанин А.М., Хорьков С.В., Угольников А.Ю.* // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. С. 301–304.