01;03

К теории конвективного движения газа в цилиндрическом объеме

© *С.О. Гладков*

Московский государственный областной университет
E-mail: Sglad@new.mail.ru

В окончательной редакции 2 февраля 2005 г.

Исследовано движение газа в поле силы тяжести для аксиально-симметричного тела при условии, что на его торцевых гранях поддерживаются различные температуры.

Проанализирована система уравнений теплопроводности, Навье–Стокса и непрерывности, и найдены зависимости конвективных составляющих компонент скорости $v'_z(r, z)$, $v'_r(r, z)$ и температуры T от цилиндрических координат r, z.

Проведена оценка времени установления теплового равновесия за счет конвекции и теплопроводности.

Изучение вопросов, связанных с проявлением тех или иных конвективных сил, насчитывает массу различных публикаций в данном направлении, посвященных решению множества прикладных и чисто теоретических проблем.

Несмотря на это, имеет место один незакрытый вопрос, важный в чисто практическом плане и касающийся описания конвективного движения газа в шахте, вырытой в глубь поверхности Земли в виде протяженного тела вращения (для краткости будем называть его иногда просто колодцем) длиной l.

Итак, пусть температуры на торцах колодца есть T и T_0, где T_0 — температура на верхнем торце, а T — на нижнем. При этом выполнено условие $T > T_0$.

Выберем ось z вдоль аксиальной оси и запишем систему уравнений теплопроводности, Навье–Стокса с учетом конвективного слагаемого и непрерывности в виде (см., например, [1])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi \Delta T, & (1) \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\dfrac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}(T - T_0), & (2) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. & (3) \end{cases}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, t — время, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, P — давление, ρ — плотность газа, ν — его кинематическая вязкость, χ — коэффициент температуропроводности, β — коэффициент объемного расширения.

Считая газ несжимаемым, из уравнения (3) следует, что $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

В силу того, что речь идет об описании конвекции в области ниже уровня поверхности Земли (Планеты), надо вспомнить (см., скажем, работу [2]), что при $r \leqslant R$, где R — радиус Земли, ускорение свободного падения описывается зависимостью

$$\mathbf{g} = g\,\frac{\mathbf{r}}{R}, \tag{4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от центра Планеты в точку наблюдения под ее поверхностью и принадлежащий некоторой области V.

Для начала найдем рашение в стационарном случае, положив, что $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. В итоге уравнения (1) и (2) запишутся как

$$\begin{cases} \dot{v}\nabla T = \chi\Delta T, & (5) \\ (\dot{v}\nabla)\dot{v} = -\dfrac{\nabla P}{\rho} + g\,\dfrac{\mathbf{r}}{R} + \nu\Delta\dot{v} - \beta g(T - T_0)\dfrac{\mathbf{r}}{R}. & (6) \end{cases}$$

Если от обеих частей уравнения (6) взять операцию rot, находим

$$\Delta \operatorname{rot}\mathbf{v} = \frac{\beta g}{\nu R}\,[\mathbf{r} \times \nabla T]. \tag{7}$$

Введем систему координат, более удобную для нашей задачи, поместив ее начало в середину нижнего торца. Тогда будет $\mathbf{r}' = \mathbf{R} - \mathbf{l} + \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$, где r_0 — радиус основания, и уравнение (7), если ввести единичный вектор нормали к поверхности $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$, приближенно запишется как

$$\Delta \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\beta g}{\nu} [\mathbf{n} \times \nabla T], \tag{8}$$

где дифференцирование ведется уже в новой штрихованной системе координат, а везде далее знак штриха мы будем опускать.

В силу цилиндрической симметрии задачи температура будет зависеть только от координат r и z.

Что касается скорости, то, чтобы автоматически удовлетворить уравнению $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, следует выбрать скорость в виде

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{9}$$

где вектор $\mathbf{A}$ предстоит найти.

В итоге из уравнений (5) и (8) получается

$$\begin{cases} (v_{0z} + v'_z) \dfrac{\partial T}{\partial z} = \chi \Delta T, \\ \Delta^2 \mathbf{A} = -\dfrac{\beta g}{\nu} [\mathbf{n} \times \nabla T], \end{cases} \tag{10}$$

где мы воспользовались равенством $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + v'$, здесь $\mathbf{v}_0$ — некоторая скорость, а v' — скорость, обусловленная только конвекцией.

При получении системы (10) была выбрана калибровка вектора $\mathbf{A}$ в виде равенства нулю его дивергенции ($\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$). Последнее условие становится вполне очевидным, если единственная отличная от нуля компонента вектора $\mathbf{A}$ есть A_φ, зависящая от координат r и z.

При изучении чисто конвективного движения можно принять $\mathbf{v}_0 = 0$ и в силу малости скорости $\mathbf{v}'$, что позволяет пренебречь нелинейным слагаемым $\mathbf{v}' \nabla T$ в левой части уравнения теплопроводности, получаем

$$\Delta T = 0.$$

Решение этого уравнения в цилиндрической системе координат хорошо известно и можно сразу же написать его в виде

$$T(r, z) = J_0\left(\frac{\lambda r}{r_0}\right)\left(C_1 e^{\frac{\lambda z}{r_0}} + C_2 e^{-\frac{\lambda z}{r_0}}\right), \tag{11}$$

где λ — параметр разделения переменных, а $J_0(\xi)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Из граничного условия, которое можно представить в виде закона Ньютона
$$T(r,z)_{r=r_0} = T_0 + (T - T_0)\,\frac{z}{l},$$
следует, что
$$T(r,z)_{r=r_0} = T_0 + (T - T_0)\,\frac{z}{l} \approx T_0 e^{\frac{(T-T_0)}{T_0}\frac{z}{l}}. \tag{12}$$
Сравнив (12) с решением (11), заключаем, что $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{T_0}{J_0(\lambda)}$, $\lambda = \frac{r_0}{l}\frac{(T-T_0)}{T_0}$. Следовательно, зависимость температуры от координат будет выглядеть таким образом
$$T(r,z) = T_0\,\frac{J_0\left(\frac{T-T_0}{T_0}\,\frac{r}{l}\right)}{J_0\left(\frac{T-T_0}{T_0}\,\frac{r_0}{l}\right)}\,e^{\frac{(T-T_0)}{T_0}\frac{z}{l}}. \tag{13}$$
Зная решение (13), из нижнего уравнения системы (10) для φ-компоненты вектора $\mathbf{A}$ получается неоднородное бигармоническое уравнение $\Delta^2 A_\varphi = -\frac{\beta g}{\nu}\frac{\partial T}{\partial r}$. С учетом (13) отсюда следует
$$\Delta^2 A_\varphi = \frac{\beta g (T - T_0)}{\nu l}\,\frac{J_1(\xi)}{J_0(\xi_0)}\,e^{\frac{(T-T_0)}{T_0}\frac{z}{l}}, \tag{14}$$
где параметры есть $\xi = \frac{(T-T_0)}{T_0}\frac{r}{l}$, $\xi_0 = \frac{(T-T_0)}{T_0}\frac{r_0}{l}$, а $J_1(\xi)$ — функция Бесселя первого порядка.

Решение уравнения (14) удобно искать в виде произведения
$$A_\varphi = e^{\frac{(T-T_0)}{T_0}\frac{z}{l}}\,\psi(r), \tag{15}$$
где новая функция $\psi(r)$ удовлетворяет уравнению
$$\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \left(\frac{T - T_0}{T_0 l}\right)^2\right]^2 \psi = -\frac{\beta g (T - T_0)}{\nu l J_0(\xi_0)}\,J_0'(\xi). \tag{16}$$
Для всех реальных параметров, входящих в определение аргумента ξ его значение всегда много меньше единицы. Поэтому $J_0(\xi_0) \approx 1$, а $-J_1(\xi) = J_0'(\xi) \approx -\frac{\xi}{2} = -\frac{(T-T_0)}{2T_0}\frac{r}{l}$. Уравнение (16) при этом серьезно

упрощается, и мы имеем в пренебрежении вторым слагаемым в левой части, что

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]^2\psi = -Br, \tag{17}$$

где $B = \frac{\beta g T_0}{2\nu l^2}\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2$.

Отсюда

$$\psi(r) = \frac{Br^5}{225} + \frac{C_1 r^2}{4}\ln r + \frac{C_2 r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4, \tag{18}$$

где $C_{1,2,3,4}$ — константы интегрирования.

Физическим смыслом в рамках решаемой в настоящей работе проблемы обладает только первое слагаемое в (18). Положив поэтому все константы C_i равными нулю, находим

$$\psi(r) = \frac{Br^5}{225}. \tag{19}$$

С учетом (15)

$$A_\varphi = \frac{Br^5}{225} e^{\frac{(T-T_0)}{T_0}\frac{z}{l}}. \tag{20}$$

И, следовательно, конвективные составляющие скорости будут

$$\begin{cases} v'_z = \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r} = \dfrac{Br^4}{45} e^{\alpha\frac{z}{l}}, \\ v'_r = -\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\dfrac{\alpha Br^5}{225 l} e^{\alpha\frac{z}{l}}, \end{cases} \tag{21}$$

где $\alpha = \frac{T-T_0}{T_0}$.

Как видно из приведенного решения, условие $\operatorname{div}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ выполняется автоматически.

Так как $v'_z = \frac{dz}{dt}$, а $v'_r = \frac{dr}{dt}$, то линии конвективных потоков легко определяются в результате решения системы уравнений (21). В силу слабой зависимости экспоненты от координаты z решение уравнений (21) можно представить в следующем виде

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha\frac{z}{5l}}, \\ z(t) = \dfrac{5l}{4\alpha}\ln\left(1 + \dfrac{4\alpha B r_0^4}{225 l} t\right) \approx \dfrac{Br_0^4}{45} t, \end{cases} \tag{22}$$

где r_0 — значение радиуса при $z = 0$ (на верхней торцевой части колодца).

Как отсюда следует, скорость v'_z вдоль аксиальной оси остается практически постоянной на протяжении всего времени движения конвективного потока, а именно

$$v'_z = \frac{Br_0^4}{45}. \tag{23}$$

Что касается радиальной скорости v'_r, то она определится из очевидного соотношения

$$v'_r = \dot{r} = \frac{\alpha r_0}{5l}\,\dot{z}e^{\alpha\frac{z}{5l}} \approx \frac{\alpha Br_0^5}{225l}. \tag{24}$$

Из сравнения полученных решений (23) и (24) вытекает неравенство

$$v'_r \ll v'_z \tag{25}$$

и физическая картина становится вполне прозрачной.

В самом деле, на фоне почти постоянного смещения потока газа вдоль оси z к нижнему торцу колодца, происходящего благодаря наложению двух факторов: силы тяжести и конвекции, имеет место еще более медленное смещение потока к центральной оси, вдоль которой поток устремляется вверх (скорость v'_z меняет знак) после достижения нижнего торца.

Время движения конвективного потока газа в радиальном направлении вблизи нижнего основания есть, очевидно, $\Delta t = \frac{r_0}{v'_r}$. Поскольку, согласно (24), радиальная скорость есть $v'_r = \frac{\alpha Br_0^5}{225l}$, то $\Delta t = \frac{225l}{\alpha Br_0^4}$. Так как явное выражение для B есть $B = \frac{\alpha^2\beta g T_0}{2\nu l^2}$, а для газа, кроме того, выполняется условие $\beta = \frac{1}{T}$, то окончательно получаем

$$\Delta t = \frac{450\nu l^3}{\alpha^3 g r_0^4}. \tag{26}$$

Если выбрать значение кинематической вязкости для воздуха $\nu = 0.15\,(\mathrm{cm^2/s})$, а геометрические размеры, например, $l = 10^3\,\mathrm{cm}$, $r_0 = 10^2\,\mathrm{cm}$, то для $g = 10^3\,(\mathrm{cm/s^2})$ и $\alpha = 0.1$ получаем оценку $\Delta t \approx 7$ суток. Если же $\alpha = 1$, то Δt уменьшается на три порядка и мы получим не семь суток, а примерно десять минут.

Для реальной ситуации близка, конечно, первая оценка, характеризующая медленное конвективное течение газа по боковым граням аксиально-симметричного тела с очень медленным смещением потока к центру $r = 0$, откуда начинается медленный подъем уже подогретого снизу газа. Здесь очень важно оценить значения параметров, когда такое явление (подъем газа) оказывается возможным. Очевидно, что для этого должно быть выполнено неравенство

$$\Delta t \leqslant t_0, \tag{27}$$

где t_0 — время остывания потока газа за счет теплопроводности.

Если через δ обозначить линейный размер переходной области контакта между потоком газа и нижнего торца колодца, то получим $t_0 \approx \frac{\delta^2}{\chi}$, где χ — коэффициент температуропроводности газа. Значит, с учетом (26) из неравенства (27) получается

$$l_{cr} \leqslant \alpha^3 \sqrt{\frac{g\delta^2 r_0^4}{450\nu\chi}}. \tag{28}$$

Пусть, к примеру, $\delta = 1\,\text{cm}$, тогда для воздуха $\nu = 0.15\,(\text{cm}^2/\text{s})$, $\chi = 0.187\,(\text{cm}^2/\text{s})$ и для наших значений $\alpha = 0.1$, $r_0 = 10^2\,\text{cm}$, отсюда получаем оценку верхнего значения: $l_{cr} \leqslant 2\,\text{m}$.

Заметим, кстати, что приведенное численное значение прекрасно согласуется с так называемой „глубиной промерзания“ грунта в зимний период времени. Действительно, классическим путем она получается из условия $L \sim \sqrt{\chi t^*}$ и, если принять $t^* = 90$ дней (длительность холодного времени года), то для $\chi = 0.187\,(\text{cm}^2/\text{s})$ получается $L \approx 2\,\text{m}$ (см. монографию [3]). Таким образом, $L \sim l_{cr}$.

Что касается вычисления зависимости давления от координат r, z в стационарном случае, то благодаря уравнению Навье–Стокса имеем $\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g + \eta \Delta v'_z - \beta\rho g(T - T_0)$. С помощью решения (21), согласно которому $v'_z \approx \frac{Br^4}{45}$, получаем отсюда после интегрирования по z, что $P = P_0 + z\rho\left[g + \frac{16}{45}B\nu r^2 - \beta g(T - T_0)\right]$, где P_0 — давление при $z = 0$. Вывод из полученного соотношения простой: при конвективном течении $(B \neq 0)$ давление в газе в каждой его точке, во-первых, изменяется пропорционально квадрату расстояния от центра аксиальной симметрии, а во-вторых, как видно из сравнения последних двух слагаемых в квадратных скобках, оно может либо увеличиваться, либо уменьшаться по сравнению с давлением $P = P_0 + \rho g z$.

В заключение еще раз обратим внимание на ряд важных моментов.

1. Проанализировано ламинарное конвективное течение несжимаемого газа в вертикальном аксиально-симметричном колодце, располагающемся ниже поверхности Земли в направлении ее радиуса.

2. Проанализировано время конвекции и дана его численная оценка.

3. Показано, что отличными от нуля скоростями являются вертикальная и радиальная составляющие конвективной скорости $\mathbf{v}'$.

4. С помощью гидродинамического подхода приводится численная оценка „глубины промерзания“ грунта и анализируются физические условия такой возможности.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1988. 733 с.
[2] *Гладков С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. В. 8. С. 19–24.
[3] *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.