01;03;04

Функции управления волновыми процессами в областях с подвижными границами (расширение цилиндра конечной длины)

© *В.С. Крутиков*

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев
E-mail: iipt@iipt.com.ua

Поступило в Редакцию 17 февраля 2005 г.

Авторским методом обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [8,9] получены точные аналитические решения волнового уравнения цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами для общего случая. Решения универсальны, пригодны для обратных и прямых задач. Предложен способ преодоления известных для цилиндрического случая симметрии логарифмических особенностей при количественном определении значений функций управления волновыми процессами в областях с подвижными границами, в том числе при расширении цилиндрической плазменной полости конечной длины.

Расширение цилиндрического поршня [1] конечной длины — сложнейшая многомерная волновая задача с подвижными границами (ПГ). Съемки с помощью СФР (скоростного фоторегистратора) показывают, что с течением времени расширяющийся плазменный поршень превращается в полость, имеющую „гантелеобразную" форму [2,3]. В настоящее время известны численные решения только прямых подобных задач, например методом Годунова С.К. [4–6]. В работе делается попытка нахождения функций управления волновыми процессами (давления и скорости на ПГ), индуцированными цилиндрическим плазменным поршнем конечной длины. Подобные задачи в математической физике не рассматривались.

Рассмотрим физические явления начальной стадии за период $t = 0{-}15\,\mu$s расширения плазменной полости, что приближенно соответствует времени ввода энергии, „история" которого с некоторым запаздыванием $t^0 = (r_1 - r_0)/a$ формирует вид функции давления $P(r_1, t)$

в точке r_1. За это время, если даже $v^*(R(t), t) = 200\,\mathrm{m/s} = \mathrm{const}$ [7] размер достигает $R(t) = r_0 + v^* \cdot t = 3.1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Начальный радиус $r_0 = 0.1\,\mathrm{mm}$ т.е. практически находится между толщиной электродов ($\sim 8\,\mathrm{mm}$), например при электрическом разряде в жидкости (либо стенкой и электродом). Поэтому при вычислении объема V в уравнении баланса энергии по методу Годунова С.К. [4–6] можно в рассматриваемый промежуток времени $t = 0{-}15\,\mu\mathrm{s}$ в первом приближении использовать только радиальную скорость, дающую наибольший вклад в формирование функции воздействия $P(r_1, t)$. Кроме того, физически понятно, что функции управления при расширении бесконечного и цилиндра конечной длины l будут идентичными в определенном промежутке времени $\Delta t = c/a - t^0$; $c = \left[(0.5l)^2 + (r_1 - r_0)^2\right]^{1/2}$. За это время в точке r_1 расширение частей бесконечного цилиндра, больших l, „не слышны“. Изложенное позволяет: выбрать тот промежуток времени, когда функции управления бесконечного и конечной длины цилиндров идентичны; при подборе аппроксимирующих функций управления учесть, что если эти функции (постоянные, входящие в эти функции) определять в этот период совпадения (или близкий к нему), то, естественно, по этим функциям можно определять и количественные значения функций управления в период времени, несколько выходящий за время совпадения. Поскольку исходная для реконструкции заданная форма функции $P(r_1, t)$ (и используемая для определения упомянутых постоянных) несет информацию о том, что она индуцирована расширением цилиндрической плазменной полости конечной длины.

Волновое уравнение цилиндрической симметрии имеет вид

$$\varphi_{tt} - a^2\varphi_{rr} = a^2 r^{-1}\varphi_r = 0. \tag{1}$$

Начальные условия полагаем нулевыми. Здесь φ — потенциал скорости, r — координата, t — время, a — скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости. Методом обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов (подробное изложение приведено в [8–11]) для общего случая получены следующие функции управления *1* и *2* $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$:

$$\left|\int_0^t P(r, t-\tau)X(r_1)\,d\tau = \int_0^t f(r, \xi-\tau)X(r)\,d\tau\right|_{r=R(t)}, \tag{2}$$

$$\left|\rho\int_0^t \nu(r,t-\tau)X(r_1)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{r}\,f(r,\xi-\tau)X(r)\Big(\tau+\frac{r}{a}\Big)d\tau\right|_{r=R(t)}, \quad (3)$$

$$\left|\frac{\rho}{2}\int_0^t \big[r^2(t-\tau)-r_0^2\big]X(r_1)d\tau = \int_0^t f^*(r,\xi-\tau)X(r)\Big(\tau+\frac{r}{a}\Big)d\tau\right|_{r=R(t)}, \quad (4)$$

$$X(r)=\Big(\tau^2+2\,\frac{r}{a}\,\tau\Big)^{-1/2}, \qquad X(r_1)=\Big(\tau^2+2\,\frac{r_1}{a}\,\tau\Big)^{-1/2},$$

$$\xi = t-\frac{r-r_0}{a}, \qquad f^* = \int_0^t f(r,\xi)\,dt.$$

Представим вид изображения $P(r_1,t)=A\cdot\big((t+\beta)^2-(r_1/a)^2\big)^{-1/2}$ в классе функций Бесселя [14], тогда функции управления *1* и *2* будут иметь вид

$$P(R(t),t)=\frac{A}{\omega}-\frac{1}{2}\rho\nu^2(R(t),t), \qquad \nu(R(t),t)=\frac{A(t+\beta)}{R(t)\rho\omega}, \quad (5)$$

$$R(t)=\left\{r_0^2+\frac{2A}{\rho}\,[\omega-\omega_1]+\frac{2A^2}{\rho^2a^2}\Big[\ln\Big|\omega-\frac{A}{\rho a^2}\Big|-\ln\Big|\omega_1-\frac{A}{a^2\rho}\Big|\Big]\right\}^{1/2}, \quad (6)$$

где

$$\omega=\sqrt{(t+\beta)^2-\frac{R^2(t)}{a^2}}, \qquad \omega_1=\sqrt{\beta^2-\frac{r_0^2}{a^2}},$$

$$\beta=\alpha+\frac{r_0}{a}, \qquad A, a, \rho, r_0, \alpha = \mathrm{const}.$$

При $t\to 0$ $P(R(t),t)=A\big[\xi^2-(r_0/a)^2\big]^{-1/2}-0.5\rho\nu^2(R(t),t)$, (7)

$t\to 0$ $\nu(R(t),t)=A\xi/r_0\rho\big[\xi^2-(r_0/a)^2\big]^{-1/2}$, $\xi=\alpha+r_0/a$, (8)

при $a\to\infty$ $R(t)=\big(r_0+2At\rho^{-1}\big)^{1/2}$. (9)

Формулы (5)–(9) при α и $r_0\to 0$ переходят в полученные ранее (8)–(10) [11].

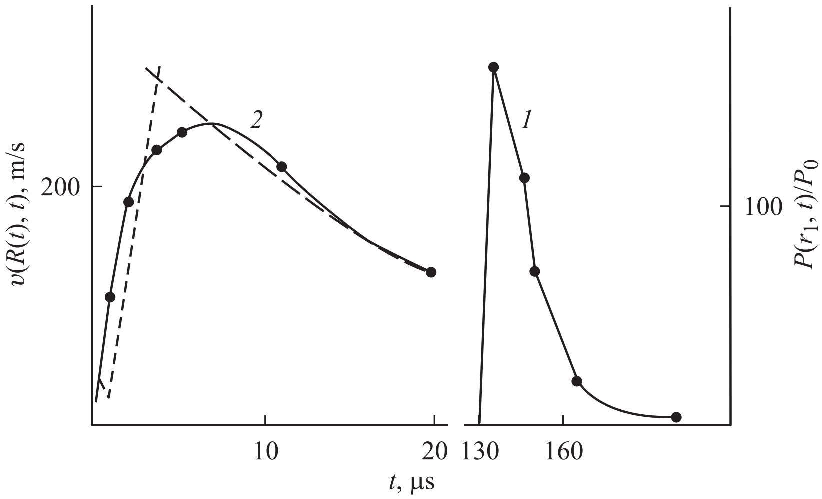
При определении функций управления *1* и *2* по (2), (3) необходимо знание закона изменения радиуса ПГ. Вычисления $R(t)$ по (4) связаны с трудностями: в аргументы функции справа входит искомая функция $R(t)$. Решение проводим, как в [12], методом последовательных приближений. Следует отметить, что в работе [13] рассматривается другая разновидность обратных волновых задач — методом последовательных приближений и без учета подвижных границ. Определяем точку r_2. Выбор точки r_2 ясен из физического смысла. Это ближайшая точка, которой не коснется ПГ за рассматриваемый период времени. Поскольку $v(R(t), t)$ неизвестно, то r_2 определяем с „запасом" в безопасную сторону: а) при $v(R(t), t) = \text{const} = 200\,\text{m/s}$ [7]; либо б) по формулам (5)–(9), скачок давления $P(r_1, t)$ для обратной задачи известен. Величины r_0 и l необходимо выбрать. Следует учесть, что заданный закон изменения $P(r_1, t)$ можно обеспечить с различного начального радиуса r_0 и различной величиной l расширяющегося цилиндра конечной длины, но при этом закон движения границы будет существенно различным.

Двумерная задача течения жидкости при электрическом разряде без каких-либо ограничений, связанных с одномерностью и нелинейностью течения, хорошо согласующаяся с результатами эксперимента [7–9], описывается системой гидродинамических уравнений [4–6]. Связь между объемом канала, давлением и мощностью, вводимой в канал, предложена Наугольных К.А. (3.44) [3].

На рисунке результаты расчетов, проведенных авторами [6] методом Годунова [4] системы (1) [6], (3.44) [3], расширения цилиндра $l = 50\,\text{mm}$ $v(R(t), t)$, $P(r_1 = 0, 2m, t)$. Кривая *1* взята для реконструкции и аппроксимирована следующим образом:

$$P(r_1, t) = D(t - t^0)\sigma_0(t - t^0) - D(t - t^0)\sigma_0(t - \alpha_2) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m (t - \alpha_2)^m, \qquad (10)$$

где $m = 0{-}3$, $A_0 = 163$, $A_1 = -5.60(6) \cdot 10^6$, $A_2 = 0.201(9) \cdot 10^{12}$, $A_3 = -0.0161(3) \cdot 10^{18}$, $\alpha_2 = t^0 + 4 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = 140.85\,\mu\text{s}$; σ_0 — единичная разрывная функция нулевого порядка; $\alpha_1 = t^0 = 136.85\,\mu\text{s}$; $D = 163/4 \cdot 10^{-6} = 40.75 \cdot 10^6\,\text{kgf/cm}^2 \cdot \text{s}$; $P_{\max}(r_1, t) = 163$. Коэффициенты Лагранжа A_m несут информацию о том, что волновые процессы индуцированы расширением цилиндра конечной длины.



Восстановление функции управления $v(R(t), t)$ — *2* по заданному давлению в точке r_1 — *1*, индуцированному цилиндрическим плазменным поршнем конечной длины. Первое приближение обозначено штриховыми линиями. Сплошные линии — расчет методом Годунова С.К., прямая задача.

Из (3) при $r = R(t) \approx r_2$, $a = 1460\,\text{m/s}$, $\rho = 102\,\text{kgf}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$, $r_0 = 0.2\,\text{mm}$, $r_1 = 0.2\,\text{m}$, первой части (10) и $v(R(t), t) = \sum\limits_{m=0}^{4} C_m \cdot t^m$ для значений $t = 0.5$; 1; 2; 3; $4 \cdot 10^{-6}$ s приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\rho \int_0^t \sum_{m=0}^{4} C_m (t-\tau)^m X(r_1)\,d\tau = D\,\frac{1}{r_2} \int_0^t \left[\left(\xi - \frac{r_2}{a}\right) \tau X(r_2) - \tau^2 X(r_2) + \xi\,\frac{r_2}{a} \right] d\tau, \qquad \xi = t - \frac{r_2 - r_0}{a}, \tag{11}$$

здесь принято с „запасом“ $r_2 = 0.73\,\text{mm}$ по формуле (9) при $A = 163 \cdot 10^{-6}\,\text{kgf}\cdot\text{s/cm}^2$ — скачок $P(r_1, t)$, решая которую получим $C_0 = 44.966053$; $C_1 = -1.58226 \cdot 10^8$; $C_2 = 1.867363 \cdot 10^{14}$; $C_3 = -5.8156 \cdot 10^{19}$; $C_4 = 6.454306 \cdot 10^{24}$. На рисунке это возрастающая часть штриховой линии. Период $t > 4\,\mu$s: аппроксимируем функцию управления следующим образом: $\nu(R(t), t) = A\exp(-\alpha_1 t)$, A, α_1 — const, которые необходимо определить. Величина $A = \nu(R(t), t = 0) = 357.35$ m/s определена по (5)–(9) при $r_1 = 0.2$ m, $r_0 = 0.2$ mm, $t^0 = 136.849315\,\mu$s, $\alpha = 0.003649699 \cdot 10^{-6}$ [14]. С учетом этой аппроксимации и разложения $\exp(\alpha_1\tau) = 1 + \alpha_1\tau + \ldots$ соотношение (3) примет вид (15) из [12]. При $t = 6.5\,\mu$s и $r_2 = 1.3$ mm получаем: $\exp(-\alpha_1 \cdot 6.5)\{1.11847049 + \alpha_1 2.4157629\} = 0.840076478$, решаемое известными методами: $\alpha_1 = 0.0523 \cdot 10^6$. Тогда $\nu(R(t); t) = 357.35\exp(-0.0523 \cdot 10^6 t)\sigma_0(t - 4 \cdot 10^{-6})$ m/s.

Анализ показывает, что разработанный подход и полученные результаты позволяют оценить уже в первом приближении функции управления цилиндрического плазменного поршня конечной длины и сократить число попыток, экспериментальных и численных, до минимума при выборе характеристик импульсного (источника) процесса для получения заранее заданных значений функций воздействия $P(r_1, t)$, $\nu(r_1, t)$. Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [15] применить для обратных задач затруднительно.

Список литературы

[1] *Кедринский В.К.* // ПМТФ. 1987. № 4. С. 23–48.
[2] *Лямшев Л.М.* // Успехи физических наук. 1987. Т. 151. № 3. С. 479–527.
[3] *Наугольных К.А., Рой Н.А.* Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971. 151 с.
[4] *Численное* решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976. 400 с.
[5] *Шуршалов Л.В.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. № 4. С. 793–799.
[6] *Барбашова Г.А., Иванов А.В.* // Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1986. № 53. С. 16–19.
[7] *Крутиков В.С.* // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 4. С. 534–540.
[8] *Крутиков В.С.* Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка, 1985. 125 с.
[9] *Крутиков В.С.* // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 1. С. 17–20.
[10] *Крутиков В.С.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 6. С. 510–514.
[11] *Крутиков В.С.* // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 755–758.

[12] *Крутиков В.С.* Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 1. С. 9–16.
[13] *Баев А.В.* // Докл. РАН. 1986. Т. 287. № 6. С. 1358–1361.
[14] *Крутиков В.С.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 24. С. 7–14.
[15] *Гринберг Г.А.* // ПММ. 1967. Т. 31. № 2. С. 193–203.