

01;04

## Точное решение дисперсионного уравнения Ландау для колебаний электронной плазмы

© А.Е. Дубинов, И.Д. Дубинова

ФГУП „Российский федеральный ядерный центр —  
ВНИИ экспериментальной физики“  
E-mail:dubinov@rol.ru

Поступило в Редакцию 8 августа 2005 г.

Получено точное решение дисперсионного уравнения Л.Д. Ландау для колебаний максвелловской электронной плазмы в коротковолновом пределе  $kr_D \gg 1$ .

PACS: 52.27.-h

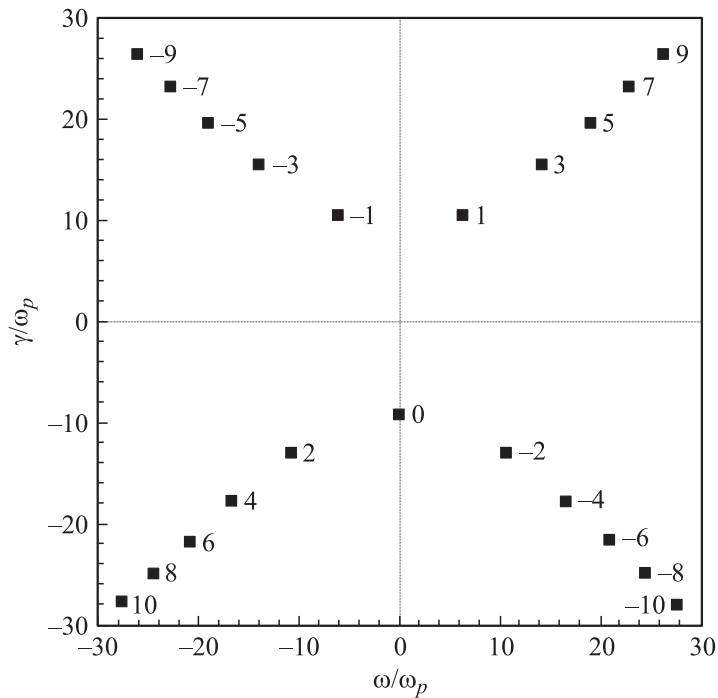
При анализе колебаний электронной плазмы, возникающих в результате произвольного начального неравновесного распределения в ней, Л.Д. Ландау пришел в коротковолновом пределе  $kr_D \gg 1$  к дисперсионному уравнению [1], которое запишем в современных обозначениях

$$\frac{4\pi e^2}{mk^2} 2\pi i \frac{df_0(-p/ik)}{du} = 1, \quad (1)$$

где  $k$  — волновое число,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $f_0(u)$  — равновесная функция распределения электронов по скоростям,  $p = -i\omega - \gamma$  ( $\omega$  — частота,  $\gamma$  — декремент).

Подстановка равновесной функции распределения Максвелла ( $n$  — равновесная концентрация плазмы,  $\kappa$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура электронов)

$$f_0(u) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi\kappa T}} \exp\left(-\frac{mu^2}{2\kappa T}\right) \quad (2)$$



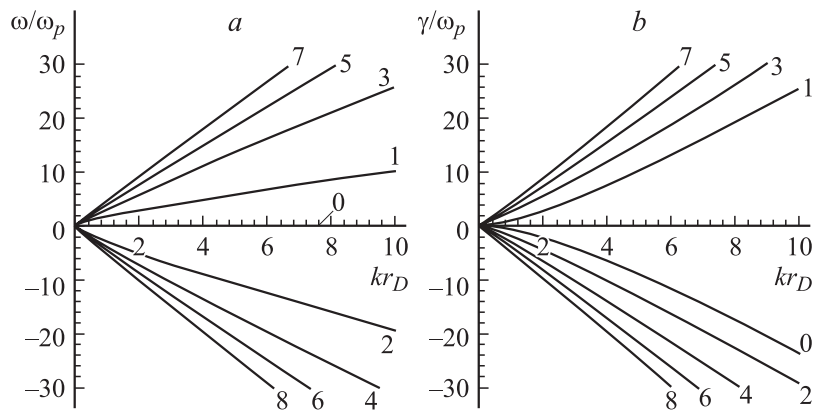
**Рис. 1.** Карта комплексных частот, соответствующих решению (4) дисперсионного уравнения (3); число у каждой точки обозначает номер ветви  $\nu$ .

приводит дисперсионное уравнение (1) к трансцендентному виду относительно  $p$

$$\sqrt{2\pi} \frac{p}{\omega_p (kr_D)^3} \exp \frac{p^2}{2\omega_p^2 (kr_D)^2} = 1, \quad (3)$$

где  $\omega_p$  — плазменная электронная частота Ленгмюра,  $r_D$  — радиус Дебая–Хюккеля. Далее в [1] Л.Д. Ландау проводил исследование комплексных корней уравнения (3) лишь качественным образом. Полученные при этом выводы вошли во многие монографии и учебные пособия (например, [2,3]).

В настоящее время уравнение (3) допускает получение точного решения в виде явного выражения для всех своих комплексных корней.



**Рис. 2.** Дисперсионные кривые (4): *a* — нормированная частота; *b* — нормированный декремент; число у каждой кривой обозначает номер ветви  $\nu$ .

Нами была выведена следующая формула для корней:

$$p_\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \omega_p (kr_D)^3 \exp \left\{ -\frac{1}{2} W_\nu \left[ \frac{(kr_D)^4}{2\pi} \right] \right\}; \quad \nu = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots, \quad (4)$$

в справедливости которой легко убедиться простой подстановкой в (3). В полученном решении использована сравнительно новая многозначная комплексная  $W$ -функция Ламберта [4,5] (где  $\nu$  — номер ее ветви), позволяющая решать сложные трансцендентные дисперсионные уравнения [6,7] и другие математические задачи физики [8–11].

Решение (4) позволяет достаточно просто и наглядно анализировать спектр собственных колебаний электронной плазмы и строить дальнейшие теории. На рис. 1 показана в качестве примера карта нормированных на  $\omega_p$  собственных частот на комплексной плоскости  $(\omega, i\gamma)$  для  $kr_D = 5$ , вычисленных по (4). Легко видеть, что дисперсионное уравнение имеет всегда один действительный корень, соответствующий основной ветви  $W$ -функции Ламберта ( $\nu = 0$ ), из чего следует, что имеется ненулевой декремент при  $\omega \rightarrow 0$ . Остальные корни — комплексные, а модуль их растет с ростом  $\nu$ . На рис. 2 показаны также дисперсионные кривые.

Таким образом, в работе получено точное решение дисперсионного уравнения Л.Д. Ландау для колебаний максвелловской электронной плазмы в коротковолновом пределе.

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 7. С. 574.
- [2] Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы. М.: Мир, 1974.
- [3] Клеммоу Ф., Доуэрти Дж. Электродинамика частиц и плазмы. М.: Мир, 1996.
- [4] Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. // Canadian J. Phys. 2000. V. 78. P. 823.
- [5] Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W-функция Ламберта: таблица интегралов и другие математические свойства. Саров: СарФТИ, 2004.
- [6] Dubinov A.E., Dubinova I.D. // J. Plasma Phys. 2005. V. 71. N 5.
- [7] Алексеев Б.В., Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. // Теплофиз. высок. темп. 2005. Т. 43. № 4.
- [8] Дубинова И.Д. // Физ. плазмы. 2004. Т. 30. № 10. С. 937.
- [9] Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. // ДАН. 2004. Т. 394. № 6. С. 767.
- [10] Дубинов А.Е. // ДАН. 2004. Т. 399. № 4. С. 468.
- [11] Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 11. С. 118.