

01;09

## Об установлении режима обобщенной синхронизации в хаотических осцилляторах

© А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 26 июля 2005 г.

Рассматривается поведение двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов вблизи границы возникновения режима обобщенной синхронизации. С помощью метода модифицированной системы объяснен характер расположения границы и физические механизмы, приводящие к установлению режима обобщенной синхронизации.

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Gg

Хаотическая синхронизация является одним из фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время [1,2]. В настоящее время традиционно различают фазовую [2], обобщенную [3], лаг [4], полную [5] синхронизацию и синхронизацию временных масштабов [6]. Каждый из этих типов имеет свои особенности и способы диагностики, при этом в научной литературе активно обсуждается вопрос в взаимосвязи этих типов синхронного поведения друг с другом [7–12].

Одним из интересных и важных типов синхронного поведения хаотических осцилляторов является обобщенная синхронизация. Режим обобщенной синхронизации [3] означает, что после завершения переходного процесса между состояниями взаимодействующих однонаправленно связанных ведущей  $x_d(t)$  и ведомой  $x_r(t)$  хаотических систем устанавливается функциональное соотношение  $x_r(t) = \mathbf{F}[x_d(t)]$ . Известно несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации, среди которых можно выделить метод вспомогательной системы [13].

В работе [14] было показано, что в связанных хаотических системах при малых расстройках величина связи  $\varepsilon_{GS}$ , при которой возникает ре-

жим обобщенной синхронизации, примерно в два раза больше, чем при больших расстройках. Для всех других известных типов хаотической синхронизации зависимость порога возникновения синхронного режима от параметра расстройки ведет себя другим образом: по мере уменьшения величины расстройки управляющих параметров систем, значение параметра связи, при котором устанавливается соответствующий синхронный режим, уменьшается. Природа подобного „аномального“ поведения порога обобщенной синхронизации так и не была объяснена.

Механизм возникновения режима обобщенной синхронизации может быть выявлен при помощи метода модифицированной системы [15]. Рассмотрим поведение двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов со слегка различающимися параметрами

$$\dot{x}_d = \mathbf{H}(x_d, g_d), \quad \dot{x}_r = \mathbf{H}(x_r, g_r) + \varepsilon \mathbf{A}(x_d - x_r), \quad (1)$$

где  $x_{d,r}$  — вектора состояний ведущей и ведомой систем соответственно,  $\mathbf{H}$  определяет векторное поле рассматриваемых систем,  $g_d$  и  $g_r$  — вектора параметров,  $\mathbf{A} = \{\delta_{ij}\}$  — матрица связи ( $\delta_{ii} = 0$  или 1,  $\delta_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ )),  $\varepsilon$  — параметр связи. В этом случае ведомую систему  $x_r(t)$  можно рассматривать как некоторую неавтономную модифицированную систему под внешним воздействием  $\varepsilon \mathbf{A}x_d(t)$

$$\dot{x}_m = \mathbf{H}'(x_m, g_r, \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{A}x_d, \quad \mathbf{H}'(x, g) = \mathbf{H}(x, g) - \varepsilon \mathbf{A}x. \quad (2)$$

Слагаемое  $-\varepsilon \mathbf{A}x$  фактически вносит дополнительную диссипацию в модифицированную систему. Очевидно, что режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (1) при увеличении параметра связи  $\varepsilon$ , может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно: увеличения диссипации в модифицированной системе и возрастания амплитуды внешнего сигнала. Оба процесса связаны друг с другом посредством параметра  $\varepsilon$  и не могут быть реализованы в ведомой системе (1) независимо. Тем не менее отдельное рассмотрение этих процессов позволяет лучше понять механизмы, приводящие к установлению режима обобщенной синхронизации.

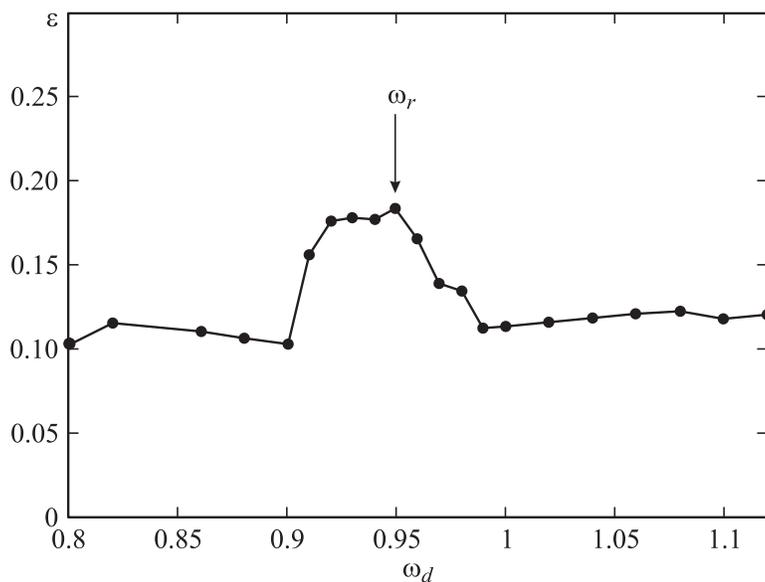
Для автономной модифицированной системы величина  $\varepsilon$  выступает в качестве параметра диссипации. Когда  $\varepsilon = 0$ , поведение модифицированной системы  $x_m(t)$  полностью совпадает с поведением ведомой

системы  $x_r(t)$  в отсутствие связи. С увеличением параметра диссипации  $\varepsilon$  динамика модифицированной системы должна упрощаться, вследствие чего модифицированная система  $x_m(t)$  должна совершать переход от хаотических колебаний к регулярным (периодическим) или к стационарному состоянию (при больших значениях параметра диссипации). Внешний сигнал в соотношении (2), наоборот, стремится навязать хаотическую динамику ведущей системе  $x_d(t)$  модифицированной системе  $x_m(t)$ , усложняя ее динамику. Режим обобщенной синхронизации в системе (1), как было показано в [15], может существовать только тогда, когда собственная хаотическая динамика модифицированной системы (5) будет подавлена за счет увеличения диссипации. Однако хорошо известно, что даже периодическое внешнее воздействие может привести к возникновению хаотической динамики в системе, демонстрирующей периодическое поведение (см., например, [16]). Поэтому установившийся регулярный режим должен быть достаточно устойчив, чтобы внешнее воздействие не могло возбудить собственную хаотическую динамику модифицированной системы  $x_m(t)$ . Устойчивость периодического режима обусловлена, прежде всего, свойствами самой модифицированной системы и не зависит от расстройки параметров осцилляторов, поэтому при изучении механизмов, обуславливающих возникновение режима обобщенной синхронизации, целесообразно фиксировать значение управляющих параметров  $g_r$  ведомой системы, а изменять параметры ведущего осциллятора  $g_d$ .

Проанализируем порог возникновения обобщенной синхронизации на примере системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера со слабо различающимися параметрами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, & \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, & \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), & \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c). \end{aligned} \quad (3)$$

В системе (3) параметр  $\varepsilon$  характеризует величину связи между осцилляторами. Значения управляющих параметров были выбраны по аналогии с работой [14]:  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ . Управляющий параметр ведомой системы  $\omega_r = 0.95$ , характеризующий основную частоту колебаний, был фиксирован (как это уже обсуждалось выше), а аналогичный параметр ведущей системы  $\omega_d$  варьировался в диапазоне



**Рис. 1.** Граница возникновения режима обобщенной синхронизации для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (3) на плоскости управляющих параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$ . Значение параметра  $\omega_r$  ведомой системы показано стрелкой.

от 0.8 до 1.1 для того, чтобы задать слабую расстройку взаимодействующих осцилляторов.

На рис. 1 показано расположение границы возникновения режима обобщенной синхронизации системы двух связанных хаотических осцилляторов (3) на плоскости управляющих параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$ . Порог обобщенной синхронизации определялся с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент для системы (3) и уточнялся с помощью метода вспомогательной системы. Из рисунка видно, что порог возникновения режима обобщенной синхронизации при малых расстройках систем существенно выше, нежели при больших. В то же самое время следует обратить внимание на тот факт, что при достаточно больших значениях расстройки связанных систем значение параметра связи  $\varepsilon_{GS}$ , отвечающее возникновению режима обобщенной

синхронизации, практически не зависит от величины параметра  $\omega_d$  ведущей системы.

Подобное поведение рассматриваемых систем может быть объяснено с помощью метода модифицированной системы, кратко изложенного выше (см. также [15]). Ведомая система (3) может быть сведена к автономной модифицированной системе

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= -\omega_r y_m - z_m - \varepsilon^* x_m, \\ \dot{y}_m &= \omega_r x_m + a y_m, \\ \dot{z}_m &= p + z_m(x_m - c).\end{aligned}\tag{4}$$

В качестве параметра  $\varepsilon^*$  выступает величина коэффициента связи  $\varepsilon$ , символ „\*“ поставлен для того, чтобы можно было разделить два механизма (диссипацию и интенсивность внешнего воздействия), обуславливающие возникновение режима обобщенной синхронизации, друг от друга. С увеличением параметра  $\varepsilon^*$  модифицированная система Ресслера (4) совершает переход от хаотических колебаний к периодическим через обратный каскад бифуркаций удвоения периода.

Для изучения режима обобщенной синхронизации следует рассматривать неавтономную динамику модифицированной системы (4)

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= -\omega_r y_m - z_m - \varepsilon^* x_m + \varepsilon F(t), \\ \dot{y}_m &= \omega_r x_m + a y_m, \\ \dot{z}_m &= p + z_m(x_m - c),\end{aligned}\tag{5}$$

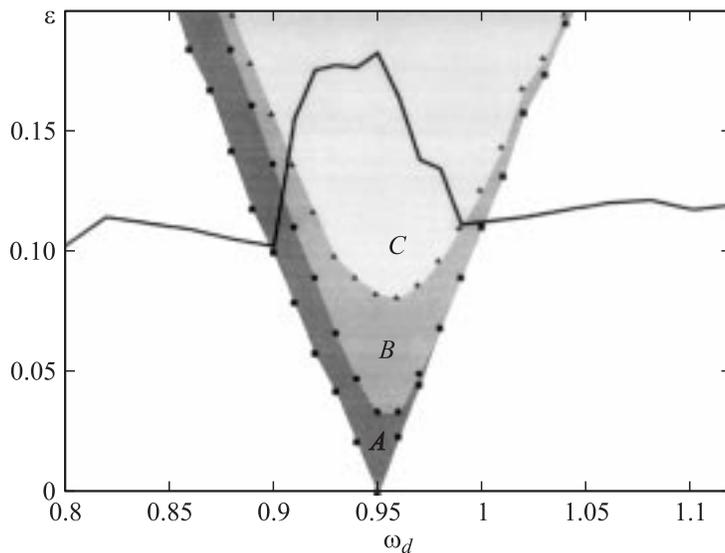
где в качестве внешнего сигнала  $F(t)$  необходимо использовать временную реализацию  $x_d(t)$  ведущей системы из (3).

При достаточно больших значениях параметра  $\varepsilon^*$  в автономной модифицированной системе будет реализоваться периодический режим. В то же самое время фурье-спектр ведущей системы (3) при выбранных значениях управляющих параметров характеризуется ярко выраженной главной спектральной компонентой, соответствующей основной частоте колебаний. Соответственно в качестве первого приближения поведения однонаправленно-связанных осцилляторов (3) можно рассмотреть поведение модифицированной системы под внешним гармоническим

воздействием  $F(t) = A \cos(\Omega t)$ , амплитуда  $A$  и частота  $\Omega$  которого соответствуют основной спектральной компоненте ведущего осциллятора Ресслера.

Понятно, что при значениях частоты  $\Omega$ , близких к собственной частоте колебаний модифицированной системы (4), возможны захват частот и установление режима синхронизации. Тогда поведение модифицированной системы (а следовательно, и ведомой системы) может быть качественно различно внутри области синхронизации и вне ее. Характер расположения границы возникновения режима обобщенной синхронизации (см. рис. 1) подтверждает данное предположение. Тот факт, что при относительно больших значениях расстройки осцилляторов режим обобщенной синхронизации наступает практически при одном и том же значении параметра связи  $\varepsilon_{GS} \approx 0.11$  независимо от величины  $\omega_d$ , свидетельствует о том, что системы находятся вне области синхронизации (основные частоты не захвачены) и параметр связи  $\varepsilon_{GS}$ , при котором устанавливается режим обобщенной синхронизации, определяется прежде всего свойствами модифицированной системы (4). Характер же расположения границы обобщенной синхронизации при малых расстройках обусловлен динамикой системы внутри языка синхронизации.

Для более детального выяснения факторов, влияющих на характер расположения границы обобщенной синхронизации на плоскости  $\omega, \varepsilon$  было проведено исследование неавтономного поведения модифицированной системы (4) под гармоническим внешним воздействием. Параметр  $\varepsilon^*$  был выбран фиксированным и равным 0.11, что приблизительно соответствует границе возникновения обобщенной синхронизации при больших расстройках взаимодействующих осцилляторов, амплитуда внешнего воздействия выбиралась в виде  $A = \varepsilon B$ , где величина  $B \approx 0.105$  определялась таким образом, чтобы энергия гармонического сигнала соответствовала энергии, приходящейся на основную частоту колебаний ведущей системы. Параметр  $\varepsilon$  в этом случае задает интенсивность внешнего воздействия и является аналогом параметра связи в системах (3). Подобная нормировка позволяет нанести границы области синхронизации неавтономной модифицированной системы на плоскости  $(\omega_d, \varepsilon)$ , поскольку частота вынуждающей силы  $\Omega$  имеет смысл основной частоты в спектре колебаний ведущей системы Ресслера, которая (частота) весьма близка к значению параметра  $\omega_d$ .



**Рис. 2.** Язык синхронизации неавтономной модифицированной системы на плоскости  $(\omega_d, \varepsilon)$ . Область  $A$  соответствует периодическим колебаниям цикла периода 1, область  $B$  — каскаду бифуркаций удвоения периода, область  $C$  — хаотическим колебаниям. Для объяснения характера расположения границы возникновения обобщенной синхронизации эта граница показана на  $(\omega_d, \varepsilon)$  плоскости.

На рис. 2 показан клюв синхронизации модифицированной системы Ресслера (4) под внешним гармоническим воздействием с вышеуказанными значениями параметров на плоскости  $(\omega_d = \Omega, \varepsilon)$ . На том же рисунке показана граница возникновения режима обобщенной синхронизации. Из сопоставления приведенных данных можно сделать вывод о том, что различия в характере расположения границы возникновения обобщенной синхронизации обусловлены наличием клюва синхронизации.

Вне клюва синхронизации возникновение режима обобщенной синхронизации определяется свойствами модифицированной системы и не зависит от расстройки параметров. Внутри клюва синхронизации поведение системы оказывается другим. Для пояснения того, почему граница обобщенной синхронизации при малых расстройках смещается

в сторону бóльших значений по параметру связи  $\varepsilon$  на рис. 2 внутри клюва синхронизации нанесены линии удвоения периода и линия, соответствующая установлению хаотического режима, рождающегося в клюве синхронизации неавтономной модифицированной системы через каскад бифуркаций удвоения периода. Понятно, что в этом случае в системе возбуждаются хаотические колебания, препятствующие установлению режима обобщенной синхронизации. Подавить возникновение хаотических колебаний можно лишь увеличением диссипации в модифицированной системе, что соответствует увеличению параметра связи  $\varepsilon$  в исходной системе (3). Соответственно порог возникновения обобщенной синхронизации сдвигается в сторону бóльших значений параметра связи.

При сопоставлении границы обобщенной синхронизации на плоскости  $(\omega_d, \varepsilon)$  с языком синхронизации неавтономной модифицированной системы следует помнить также о том, что область синхронизации, вообще-то, дает лишь качественную картину, позволяющую объяснить наблюдаемые особенности поведения связанных систем. Во-первых, неавтономная модифицированная система (5) количественно соответствует ведомой системе (3) только при параметре  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , при всех же других значениях параметров соответствие носит лишь качественный характер. Кроме того, при моделировании внешнего воздействия гармоническим сигналом исключается из рассмотрения хаотическая динамика ведущей системы, которая также оказывает влияние на хаотизацию ведомой системы, сдвигая границу возбуждения хаотических колебаний в сторону меньших значений параметра  $\varepsilon$ .

Таким образом, характер поведения границы обобщенной синхронизации обусловлен захватом основной собственной частоты ведомой системы основной частотой ведущей системы. Внутри языка синхронизации граница возникновения режима обобщенной синхронизации может сдвигаться в сторону бóльших значений параметра связи в том случае, если внешнее воздействие внутри языка синхронизации возбуждает собственную хаотическую динамику модифицированной системы.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ по программе „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект 333), Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05–02–16273), НОЦ „Нелинейная динамика и биофизика“ СГУ (грант REC–006 of U.S. CRDF), ФНП „Династия“ и МЦФФ (Москва).

## Список литературы

- [1] *Grossman A., Morlet J.* // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15 (4). P. 273.
- [2] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
- [3] *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51 (2). P. 980–994.
- [4] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78 (22). P. 4193–4196.
- [5] *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 44 (4). P. 2374–2383.
- [6] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Physica D. 2005. V. 206 (3–4). P. 252–264.
- [7] *Boccaletti S.M., Pecora L.M., Pelaez A.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 066219.
- [8] *Brown R., Kocarev L.* // Chaos. 2000. V. 10 (2). P. 344–349.
- [9] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79 (7). С. 391–395.
- [10] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Chaos. 2004. V. 14 (3). P. 603–610.
- [11] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80 (1). С. 25–28.
- [12] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71 (5).
- [13] *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53 (5). P. 4528–4535.
- [14] *Zheng Z., Hu G.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62 (6). P. 7882–7885.
- [15] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71 (6). P. 067201.
- [16] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Сер. „Современная теория колебаний и волн“. М.: Физматлит, 2001.