*01;09*

# Генерация квазипериодических колебаний с помощью знакового коррелятора

© *А.А. Станиславский*

Радиоастрономический институт, Харьков, Украина
E-mail: alexstan@ira.kharkov.ua

*Поступило в Редакцию 12 сентября 2005 г.*

Показано, что знаковая корреляция двух гармонических колебаний с любыми иррационально связанными частотами формирует вполне регулярный процесс, спектральные составляющие которого имеют неэквидистантные комбинационные частоты. Аналитически установлен спектр такого сигнала и обсуждаются его особенности. Отмечено, что эти результаты доказывают выводы [2] о невозможности генерации хаотической последовательности импульсов знаковым коррелятором из двух периодических сигналов [1].

PACS: 95.30.-k

Исследование нелинейных систем занимает важное место в физике, химии, технике. Такие системы могут демонстрировать как простое (предсказуемое), так и непредсказуемое (хаотическое) поведение. Тем не менее нелинейность — необходимое, но не достаточное условие возникновения хаоса. В работе [1] (с. 778) утверждается, что знаковая корреляция двух прямоугольных сигналов с близкими несоизмеримыми периодами порождает дискретный пуассоновский поток прямоугольных импульсов случайной длительности, возникающих в случайные моменты времени. Ошибочность этого утверждения установлена в [2]. На самом деле такой процесс является чисто квазипериодическим и не имеет никакого отношения ни к случайным процессам, ни к детерминированному хаосу. В то же время следует отметить, что обоснование работы [2] строится на использовании численного и физического экспериментов. И хотя ее доводы не вызывают сомнений, тем не менее она имеет существенный пробел, который заключается в отсутствии последовательного аналитического расчета спектра этого процесса. Такой расчет поставил бы точку в данной дискуссии, поскольку возникает естественный вопрос: можно ли найти этот спектр в замкнутом аналитическом виде. Оказывается, что можно. Мы полагаем, что его определение было бы весьма полезным, и собираемся проделать это тщательно и подробно в настоящей работе.

Рассмотрим математическую модель следующего вида:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1(\cos\omega_1 t), \\ y(t) &= 1\big(\cos(\omega_2 t + \phi_0)\big), \\ z(t) &= x(t) \oplus y(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $1(\dots)$ — функция, возвращающая знак своего аргумента, $\oplus$ — операция исключающее ИЛИ (при совпадении знаков $x(t)$ и $y(t)$ функция $z(t)$ равна нулю, в противном случае — единице). Величины частот $\omega_1$ и $\omega_2$ могут иметь произвольное отношение. Положим, что отношение частот $\omega_1/\omega_2$ будет числом иррациональным.

Прежде всего, следует отметить, что к выражению (1) нельзя непосредственно применить преобразование Фурье, поскольку операция $\oplus$ является логической, а не арифметической, поэтому необходимо преобразовать эту операцию (записать ее эквивалент) к „удобному“ для преобразования Фурье виду. Одна из возможностей выглядит так:

$$\begin{aligned} 1\big(a(t) - C\big) \oplus 1\big(b(t) - D\big) = 1\big(a(t) - C\big) \\ + 1\big(b(t) - D\big) - 2\big[1(a(t) - C)1(b(t) - D)\big], \end{aligned}$$

где константы $C$ и $D$ позволяют получать прямоугольные импульсы любой скважности из $a(t) = \cos\omega_1 t$ и $b(t) = \cos(\omega_2 t + \phi_0)$, а $\phi_0$ — начальная разность фаз. Отсюда сразу видно, что результирующий процесс является суммой исходных процессов и их произведения. Слагаемое, пропорциональное произведению $1\big(a(t) - C\big)1\big(b(t) - D\big)$, будет приводить к появлению комбинационных частот в спектре результирующего процесса. В литературе колебания с несоизмеримыми частотами называют квазипериодическими (или почтипериодическими). Несоизмеримость в данном контексте означает, что квазипериодические колебания состоят из колебаний с иррационально связанными частотами.

Теперь заметим, что функциональное преобразование типа $1(\dots)$ будет порождать из гармонического сигнала прямоугольные импульсы с единичной амплитудой, заданным периодом и некоторой скважностью, зависящей от уровня $C$. Спектр последовательности прямоугольных импульсов хорошо известен (см., например, [3]). Тогда можно записать

$$1\big(a(t)-C\big)=\frac{1}{q_1}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi/q_1}{k\pi/q_1}\cos k\omega_1 t\right],\quad q_1=T_1/\tau_1,$$

$$1\big(b(t)-D\big)=\frac{1}{q_2}\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi/q_2}{m\pi/q_2}\cos m\omega_2 t\right],\quad q_2=T_2/\tau_2,$$

где $q_{1,2}$ — скважность, $\tau_{1,2}$ — длительность прямоугольных импульсов, которые следуют соответственно с периодом $T_{1,2}=2\pi/\omega_{1,2}$. Амплитуда прямоугольных импульсов необязательно должна быть единичной, но для простоты мы ограничимся здесь только этим случаем, хотя сама задача поддается дальнейшему обобщению. Следует также заметить, что периодическую последовательность прямоугольных импульсов, образованных из гармонического сигнала $A_m\cos\omega t$, ограниченного на уровне $A_0$ (предполагается, что $|A_0|<A_m$), с помощью знакового коррелятора можно охарактеризовать и углом отсечки $\vartheta$. Он определяется из соотношения $A_m\cos\vartheta=A_0$, откуда $\vartheta=\arccos(A_0/A_m)$. В соответствии с этим величина $2\vartheta$ равна длительности одного импульса, выраженного в угловой мере: $\omega\tau=2\vartheta$. Отсюда скважность будет связана с углом отсечки так: $q=\pi/\vartheta$.

Произведение сигналов во временной области эквивалентно свертке в спектральной области. Кроме того, спектр гармонического сигнала выражается через $\delta$-функцию Дирака. Далее можно применить известную формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi+A)\delta(\omega-\xi+B)d\xi=\delta(\omega+A+B).$$

В результате имеем выражение

$$1\big(a(t)-C\big)\cdot 1\big(b(t)-D\big)$$

$$=\frac{1}{q_1q_2}\bigg[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi/q_1}{k\pi/q_1}\,\cos k\omega_1 t+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi/q_2}{m\pi/q_2}\,\cos m\omega_2 t$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi/q_1}{k\pi/q_1}\cdot\frac{\sin m\pi/q_2}{m\pi/q_2}\big\{\cos[k\omega_1+m\omega_2]t+\cos[k\omega_1-m\omega_2]t\big\}\bigg].$$

Отсюда непосредственно следует, что процесс $z(t)$ является однозначно квазигармоническим. Произведение $1(\dots)1(\dots)$ — нелинейное преобразование, которое существенно обогащает спектр исходных процессов, но не делает его непрерывным. Оно формирует сигнал, спектральные составляющие которого имеют неэквидистантные комбинационные частоты $|k\omega_1 \pm m\omega_2|$. Заметим также, что спектральные компоненты $\cos[k\omega_1+m\omega_2]t$ и $\cos[k\omega_1-m\omega_2]t$ при равных $k$ и $m$ (но необязательно $k=m$) имеют равный спектральный вес. Этим объясняются их одинаковые высоты на рис. 1 в статье [2]. Таким образом, действительно, рассматриваемая система осуществляет чисто функциональное (и безынерционное) преобразование над двумя периодическими процессами и никакой новой информации не привносит.

В заключение интересно отметить, что при этом появляются гармоники как с большими частотами по сравнению с $\omega_{1,2}$ исходных (родительских) колебаний, так и с меньшими частотами. Поэтому если такое преобразование появляется в измерительной радиотехнической системе (например, в процессе дискретного слежения), то оно может существенно маскировать полезный сигнал, затрудняя анализ последнего. Хорошо, если точно известны (например, временны́е) характеристики полезного сигнала. Но если измерения носят поисковый характер, а полезный сигнал слабый, то обнаружение этого сигнала становится непростой задачей. Детальный анализ такой ситуации не является целью настоящей работы и будет проделан в будущем.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS–03–5727.

Автор хочет выразить благодарность С.Н. Владимирову за полезные обсуждения.

## Список литературы


[1] *Евдокимов Н.В., Комолов В.П., Комолов П.В.* // УФН. 2001. Т. 171. № 7. С. 775–795. *Evdokimov N.V., Komolov V.P., Komolov P.V.* // Physics-Uspekhi. 2001. V. 44. N 7. P. 775–795.

[2] *Владимиров С.Н.* // УФН. 2004. Т. 174. № 2. С. 217–220. *Vladimirov S.N.* // Physics-Uspekhi. 2004. V. 47. № 2. P. 217–220.

[3] *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. школа. 1988. 448 с. *Baskakov S.I.* Radiotechnical circuits and signals. Moscow: Vyshaya shkola, 1988. 448 p.