01;09

Оптимальный токовый синтез на диске

© С.И. Эминов

Новгородский государственный университет
E-mail: Theorphy@novsu.ac.ru

Поступило в Редакцию 17 октября 2005 г.

Ранее была разработана [1] общая теория синтеза токов на диске. Данная работа посвящена численной реализации этих методов.

PACS: 81.05.-t

1. Исходное уравнение синтеза. Связь между токами на диске и диаграммой направленности в осесимметричной задаче осуществляется на основе уравнения

$$Kj \equiv \int_0^1 j(t)J_1(axt)t\,dt = F(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

Здесь a — электрический радиус диска, т. е. произведение радиуса на волновое число, функция $F(x)$ получена из диаграммы направленности в результате замены $x = \sin(\theta)$, далее полагаем, что эта функция принадлежит пространству $L_2[0, 1]$.

Уравнение (1) является интегральным уравнением первого рода, поэтому задача нахождения токов $j(t)$ по заданной диаграмме направленности $F(x)$ относится к некорректной задаче [2].

2. Уравнения с малым параметром. Для решения задачи синтеза в работе [1] предложено от уравнения (1) перейти к уравнениям с малым параметром вида

$$\alpha Lj + K^\bullet Kj = K^\bullet F, \tag{2}$$

$$\alpha Aj + K^\bullet Kj = K^\bullet F, \tag{3}$$

где

$$K^\bullet F = \int_0^1 F(x)J_1(ax\tau)\tau\,dx,$$

$$K^\bullet Kj = \int_0^1 J_1(ax\tau)\tau \int_0^1 j(t)J_1(axt)t\,dt\,dx.$$

Уравнение (2) применяется для нахождения азимутальных токов, при этом

$$Lj = \int_0^{+\infty} J_1(ax\tau)\tau \int_0^1 j(t)J_1(axt)t\,dt\,dx. \tag{4}$$

А уравнение (3) используется для нахождения радиальных токов, при этом положительный оператор имеет вид

$$Aj = \int_0^{+\infty} J_1(ax\tau)\tau x^2 \int_0^1 j(t)J_1(axt)t\,dt\,dx. \tag{5}$$

3. Пространства и базисы. Уравнения (2) и (3) будем решать в энергетических пространствах H_L и H_A положительных операторов L и A соответственно. Скалярное произведение в этих пространствах определяется по формулам

$$[u, v]_L = (Lu, v), \qquad [u, v]_A = (Au, v). \tag{6}$$

Перейдем к определению ортонормированных базисов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ этих пространств. Вначале задаем преобразования Ханкеля от базисных функций

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = \int_0^1 \varphi_n(t)J_1(xt)t\,dt = \sqrt{4n-1}\,\frac{J_{2n-\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}, \tag{7}$$

$$\widetilde{\psi}_n(x) = \int_0^1 \psi_n(t)J_1(xt)t\,dt = \sqrt{4n+1}\,\frac{J_{2n+\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Базисные функции ортонормированны в следующем смысле:

$$(L\varphi_m, \varphi_n) = (A\psi_m, \psi_n) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Зная преобразование Ханкеля, можно построить сами базисные функции. Такого рода исследование нами проводится в другой нашей работе. Здесь же приведем четыре базисные функции для азимутальных токов

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{14}{\pi}}\,\frac{t(-5t^2+4)}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{\frac{22}{\pi}}\,\frac{t(21t^4-28t^2+8)}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\varphi_4(t) = \sqrt{\frac{30}{\pi}}\,\frac{t(-429t^6+792t^4-432t^2+64)}{\sqrt{1-t^2}}$$

и три базисные функции для аксиальных токов

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{10}{\pi}}\sqrt{1-t^2}t,$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{1-t^2}t(-7t^2+4),$$

$$\psi_3(t) = \frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{\pi}}\sqrt{1-t^2}t(33t^4-36t^2+8).$$

4. Сведение интегрального уравнения к СЛАУ методом Галеркина. Ограничиваясь рассмотрением уравнения (2) для азимутальных токов, разложим неизвестную функцию токов по базису

$$j(t) = \sum_{m=1}^{N} c_m\varphi_m(t) \tag{9}$$

и сведем интегральное уравнение (2) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\alpha c_n + \sum_{m=1}^{N} c_m K_{mn} = e_n, \qquad 1 \leqslant n \leqslant N, \tag{10}$$

где

$$K_{mn} = \sqrt{(4n-1)(4m-1)}\int\limits_0^1 \frac{J_{2n-\frac{1}{2}}(ax)J_{2m-\frac{1}{2}}(ax)}{ax}dx,$$

$$e_n = \sqrt{4n-1}\int\limits_0^1 F(x)\frac{J_{2n-\frac{1}{2}}(ax)}{(ax)^{\frac{1}{2}}}dx.$$

В результате решения найдем функцию токов $j_\alpha(t)$, которая зависит от параметра α. Зная токи по формуле (1), можно найти диаграмму направленности $F_\alpha(x)$, которую создают эти токи, оценить близость исходной и реализованной диаграмм в пространстве $L_2[0, 1]$

$$\delta = \left(\int_0^1 \left| F(x) - F_\alpha(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Согласно общей теории, по мере уменьшения α будет уменьшаться δ, но при этом будет расти норма токов $[j]_\alpha^2 = (Lj, j)$.

Один из основных вопросов синтеза антенн состоит в следующем: можно ли приблизиться к заданной диаграмме направленности, не привлекая токи с большой нормой.

5. Сходимость метода Галеркина. В известной нам литературе практически не исследованы вопросы сходимости численных методов при решении интегральных уравнений с малым параметром. Вместе с тем от решения этого вопроса зависит, будут ли применяться уравнения с малым параметром в физике.

Очевидно, сходимость зависит от малого параметра α и радиуса диска a. Ниже исследуется сходимость метода Галеркина в зависимости

Таблица 1. Вычисление погрешности δ для диаграммы $F(x) = 10x\exp(-10x^2)$, $a = \frac{\pi}{2}$

α	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
$N = 5$	$6.601 \cdot 10^{-1}$	$6.467 \cdot 10^{-1}$	$6.194 \cdot 10^{-1}$	$4.984 \cdot 10^{-1}$	$3.165 \cdot 10^{-1}$	$2.898 \cdot 10^{-1}$
$N = 10$	$6.601 \cdot 10^{-1}$	$6.467 \cdot 10^{-1}$	$6.194 \cdot 10^{-1}$	$4.984 \cdot 10^{-1}$	$3.165 \cdot 10^{-1}$	$2.898 \cdot 10^{-1}$

Таблица 2. Вычисление нормы $[j]$ для диаграммы $F(x) = 10x\exp(-10x^2)$, $a = \frac{\pi}{2}$

α	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
$N = 5$	0.426	0.843	4.326	50.324	3761.287	83118.450
$N = 10$	0.426	0.843	4.326	50.324	3761.287	83118.450

Таблица 3. Вычисление погрешности δ для диаграммы $F(x) = 10x \exp(-10x^2)$, $a = 4\pi$

α	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
$N = 5$	$3.924 \cdot 10^{-1}$	$8.005 \cdot 10^{-2}$	$1.244 \cdot 10^{-2}$	$7.656 \cdot 10^{-3}$	$7.656 \cdot 10^{-3}$	$7.656 \cdot 10^{-3}$
$N = 10$	$3.924 \cdot 10^{-1}$	$7.987 \cdot 10^{-2}$	$1.255 \cdot 10^{-2}$	$2.870 \cdot 10^{-3}$	$7.964 \cdot 10^{-4}$	$4.683 \cdot 10^{-4}$
$N = 20$	$3.924 \cdot 10^{-1}$	$7.987 \cdot 10^{-2}$	$1.255 \cdot 10^{-2}$	$2.870 \cdot 10^{-3}$	$7.963 \cdot 10^{-4}$	$4.664 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4. Вычисление нормы $[j]$ для диаграммы $F(x) = 10x \exp(-10x^2)$, $a = 4\pi$

α	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
$N = 5$	1.105	2.218	2.475	2.515	2.515	2.515
$N = 10$	1.105	2.218	2.473	3.044	17.966	217.452
$N = 20$	1.105	2.218	2.473	3.044	17.968	217.452

от этих параметров. Как показывают табл. 1 и 2, результаты расчетов при $N = 5$ и $N = 10$ полностью совпадают для всех рассмотренных значений α.

В табл. 3 и 4 увеличили радиус диска. Видно расхождение результатов расчета при $N = 5$ и $N = 10$. Причем расхождение проявляется сильнее при малых α. Поэтому увеличивали число базисных функций N до тех пор, пока не достигали полной стабилизации.

Таблицы демонстрируют чрезвычайно высокую эффективность развиваемого численного метода решения уравнений с малым параметром.

Список литературы

[1] *Эминов С.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. В. 1. С. 119–122.

[2] *Бахрах Л.Д., Кременецкий С.Д.* Синтез излучающих систем (теория и методы расчета). М.: Сов. радио, 1974.