

09

Управляемая хаотическая автоколебательная система

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники РАН (Фрязинский филиал),
Фрязино (Моск. обл.)
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 12 октября 2005 г.

Приведена математическая модель хаотической системы, основанной на трехмерной модификации уравнения Ван дер Поля–Дюффинга. Численными методами проведен анализ решений при использовании алгоритма хаотизирующей обратной связи. Показана возможность хаотизации колебаний и рассмотрено поведение системы при различных величинах параметра дополнительной обратной связи.

PACS: 05.45.-a

В последнее время большое внимание уделяется исследованию управления колебаниями, формируемыми двухмерным уравнением Ван дер Поля–Дюффинга, которое широко применяется для моделирования автоколебательных систем в различных областях науки и техники. Управление колебаниями обычно достигается при использовании неавтономного режима работы [1] или с помощью дополнительной запаздывающей обратной связи [2].

Представляется возможным эффективное управление колебаниями, которые реализуются при решении уравнения Ван дер Поля–Дюффинга, с помощью нового метода, основанного на автокоммутации, описываемой относительно простым алгоритмом хаотизирующей обратной связи. Как показано в [3–5], его применение возможно как к генераторам (регулярным [3] и хаотическим [4]), так и к неавтоколебательным бистабильным системам [5]. В данной работе рассматривается возможность управления колебаниями с помощью автокоммутации. При этом исследуется достаточно общая система с алгоритмом хаотизации, основанная на трехмерной модификации уравнения Ван дер Поля–Дюффинга.

Уравнения рассматриваемой системы в переменных x, y, z, u_i, v_i (при $i = 1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= y + \varepsilon(1 - z)x, \\ dy/dt &= (1/\sigma)[(\varepsilon - \beta\sigma)x^2 - (\sigma + \varepsilon z)]x + \delta f(t), \\ dz/dt &= (x^2 - z)/\sigma, \\ du_i/dt &= v_i, \\ dv_i/dt &= -\mu_i v_i - u_i + \delta_i x, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon, \beta, \sigma, \delta, \delta_i, \mu_i$ — положительные величины. При этом функция $f(t)$ связана с переменными u_i следующим условием автокоммутации:

$$f(t) = \begin{cases} u_1 & \text{при } u_1 u_2 \leq a, \\ u_2 & \text{при } u_1 u_2 \geq b, \end{cases} \quad (2)$$

где a, b — постоянные величины.

Первые три уравнения системы (1) определяют трехмерную модификацию уравнения Ван дер Поля—Дюффинга. В частном случае из них получается классическое уравнение Ван дер Поля. Действительно, дифференцируя первое уравнение и исключая переменную y , вместо трех уравнений получим

$$d^2x/dt^2 - \varepsilon(1 - z)dx/dt + (1 + \beta x^2)x = \delta f(t),$$

$$\sigma(dz/dt) = (x^2 - z).$$

Отсюда, учитывая, что $z = x^2$, если $\sigma = 0$, при $\sigma = \beta = \delta = 0$ будем иметь

$$d^2x/dt^2 - \varepsilon(1 - x^2)dx/dt + x = 0.$$

Последние четыре уравнения системы (1) описывают два фильтрующих элемента (первый и второй в соответствии с индексами), служащих для выделения колебаний на двух разнесенных частотах и обеспечения переключения („раскачки“) колебаний генератора при выполнении условия (2).

Условием (2) обеспечивается дополнительная обратная, создающая условия для возбуждения хаоса путем поддержания системы в режиме переходных процессов. В этом условии вместо \leq, \geq можно использовать соответственно также знаки меньше и больше ($<, >$).

Идея хаотизации, заложенная в использовании условия (2) и уравнений для фильтрующих элементов, заключается в том, что при достижении колебательным процессом $x(t)$ значения, при котором $u_1 u_2 \leq a$ (или $u_1 u_2 < a$), сигнал на входе хаотизируемой автоколебательной системы задается равным $u_1(t)$. И наоборот, $f(t) = u_2(t)$, если выбросы колебательного процесса $x(t)$ имеют значения $u_1 u_2 \geq b$ (или $u_1 u_2 > b$). Поскольку система самосогласованная, рассматриваемая автокоммутация должна обеспечивать хаос, так как переходные процессы, неизбежные при переключении осцилляций, должны приводить к нерегулярности самого процесса переключения. Численный анализ подтверждает изложенные представления о процессе хаотизации колебаний.

Расчеты проводились методом Рунге–Кутты 4-го порядка при шаге интегрирования по времени 0.01. Начальные условия для всех переменных равны 0.1. Выбраны следующие значения неизменяемых параметров трехмерного генератора Ван дер Поля–Дюффинга: $\varepsilon = \sigma = 1$, $\beta = 0.4$. При этом параметры фильтрующих элементов заданы так ($\mu_1 = 0.0106$, $\mu_2 = 0.013$, $\delta_1 = 0.494384$, $\delta_2 = 0.6084$), чтобы их собственные частоты были отстроены примерно на 10% (в область низких и высоких частот) относительно частот автономных колебаний генератора, которая при $\delta = 0$ равна $\omega = 1.18$. Значения параметров a и b в используемом условии коммутации (2) соответственно равны $a = 0$, $b = 1$.

Здесь следует заметить, что аналитическое определение оптимальных значения частот фильтрующих элементов едва ли возможно; численные методы являются пока единственно реальными. Как правило, оптимальная отстройка частот раскачки от базовой частоты, определяемой как частота автономных колебаний, близка к 10%; более точное ее значение можно подобрать путем численного эксперимента, так как на ее величину могут влиять различные параметры.

Численные исследования автоколебательной системы, описываемой уравнениями (1) при выполнении условия (2), показали возможность хаотизации колебаний в широких пределах изменения коэффициента δ , когда автономно (при $\delta = 0$) при выбранных величинах остальных па-

раметров $(\varepsilon, \beta, \sigma)$ реализуются лишь регулярные движения. Хаотизация колебаний при увеличении δ в интервале $\delta \in [0.35, 1.35]$, а при уменьшении δ — в интервале $\delta \in [0.55, 1.3]$ проявляется гистерезис. При этом хаотические колебания отображают перемежаемость движений, изменяющуюся в зависимости от величины параметра дополнительной обратной связи. Это иллюстрируется фрагментами реализаций, представленными на рис. 1, *a–c*, которые рассчитаны при различных значениях δ в интервале времени (для исключения переходных процессов), равном $t \in [600, 900]$. Как видно, при $\delta = 0.8$ (рис. 1, *a*) преобладают цуги „высокочастотных“ хаотических колебаний, а при $\delta = 1.2$ (*c*) — „низкочастотных“. При $\delta = 1$ система в среднем примерно одинаковое время находится в обоих бассейнах притяжения.

Цуги движений в „низкочастотном“ бассейне притяжения нерегулярны по длительности, но сами колебания являются квазипериодическими со средней частотой, близкой к третьему унтертону автономных колебаний. Хаотичность колебаний в „высокочастотном“ бассейне притяжения выражена достаточно четко. Таким образом, переключение движений между двумя наблюдающимися бассейнами притяжения можно квалифицировать как перемежаемость типа „квазирегулярные движения—хаос“.

Проведенные исследования свидетельствуют о том, что при перемежаемости происходит своеобразная „конкуренция“ колебаний, возникающих при утроении периода автономных движений, с самими исходными колебаниями. В связи с этим переход от однократных колебаний к трехкратным реализуется через хаос, сопровождающийся изменением (нерегулярным) длительности цугов „высокочастотных“ и „низкочастотных“ движений.

На рис. 2, *a, b* приведен аттрактор (*a*), соответствующий реализации, показанной на рис. 1, *b*, и спектры мощности S (рис. 2, *b*), полученные при $\delta = 1$ (кривая 1) и для сравнения при $\delta = 0$ (кривая 2). Из проекции аттрактора на плоскость $\{x, z\}$ видно, что фазовые траектории располагаются (в соответствии с третьим уравнением системы (1)) на параболлической поверхности. Спектр мощности, отображаемый кривой 1, является непрерывным и занимает широкую полосу частот. Аттрактор и спектр мощности свидетельствуют о хорошем перемешивании фазовых траекторий.

Хаотизация колебаний рассмотренной системы является возможной при различных значениях параметра нелинейной возвращающей силы,

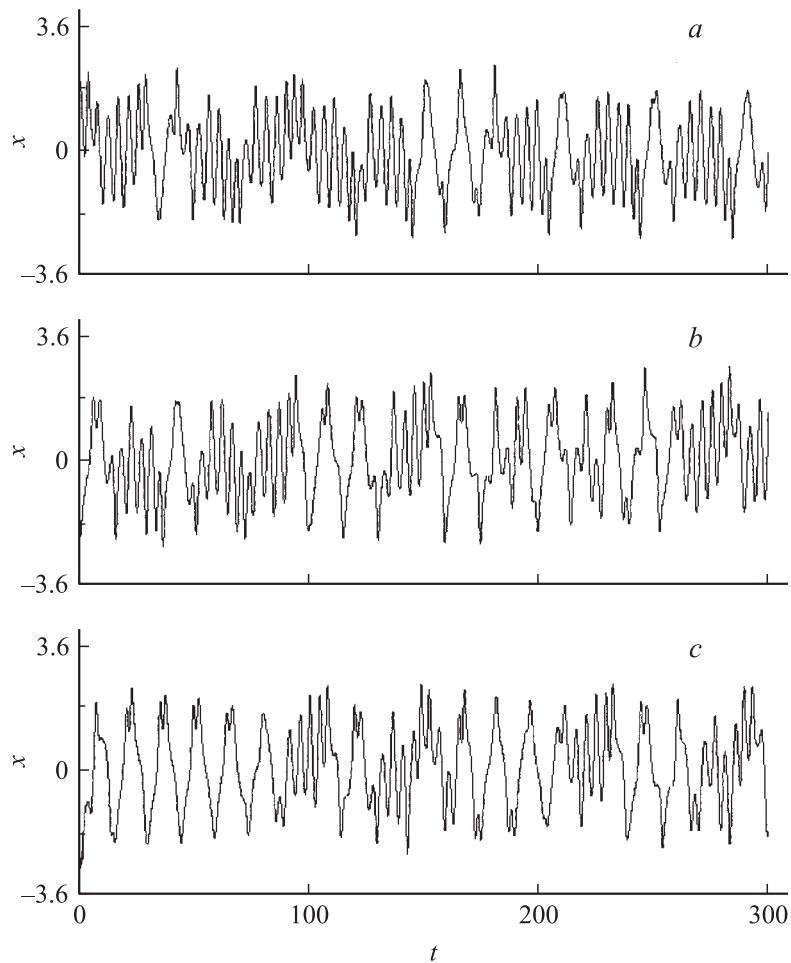


Рис. 1. Фрагменты реализаций колебательного процесса $x(t)$ при различных величинах параметра дополнительной обратной связи: a — $\delta = 0.8$; b — $\delta = 1$; c — $\delta = 1.2$.

в том числе и при $\beta = 0$. При этом в связи с сильной зависимостью частоты автономных колебаний от β необходимо соответствующее изменение параметров, определяющих собственные частоты фильтрующих

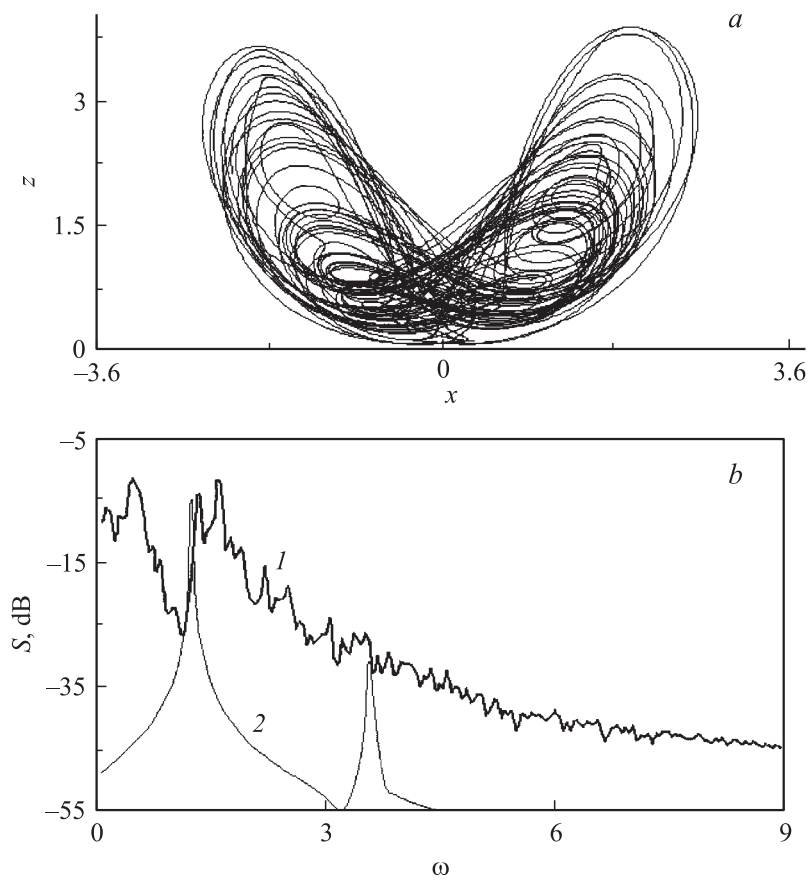


Рис. 2. Аттрактор при $\delta = 1$ (a) и спектры мощности (b) при $\delta = 1$ (кривая 1) и при $\delta = 0$ (кривая 2).

элементов. Хаотизация колебаний возможна даже при $\beta = \sigma = 0$, когда исходная автоколебательная система преобразуется в классический генератор Ван дер Поля. Это свидетельствует, в свою очередь, о том, что применение рассмотренного метода хаотизации колебаний эффективно для управления колебаниями различных систем. Представляется, что в любых автоколебательных системах, в которых возможно применение

алгоритма автокоммутиации, могут быть получены хаотические режимы работы, в связи с чем целесообразно расширение круга исследования систем, управляемых предложенным методом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-02-16536).

Список литературы

- [1] *Moukam Kakmeni F.M., Bowong S., Tchawoua C. et al. // J. of Sound and Vibration. 2004. V. 277. P. 783–799.*
- [2] *Хи J., Chung K.W. // Physica D. 2003. V. 180. P. 17–39.*
- [3] *Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 15. С. 30–34.*
- [4] *Кальянов Э.В. // Нелинейный мир. 2003. Т. 1. № 1–2. С. 45–54.*
- [5] *Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 13. С. 45–50.*