01

О функции, описывающей поведение системы перед катастрофическими событиями, и дифференциальных уравнениях, которым она удовлетворяет

© *М.А. Басин*

Санкт-Петербургский союз ученых
E-mail: info@spass-sci.ru

Поступило в Редакцию 28 ноября 2005 г.

В работе [1, с. 9], на основе анализа экспериментальных данных, полученных для различных катастрофических явлений, при аппроксимации основных параметров, характеризующих процесс, предшествующий катастрофе, предложена следующая функция от времени: $I(t) = A + B(t_c - t)^{\alpha} \times [1 + C\cos(\omega \log(t_c - t) - \varphi)]$.

Комплексификация этой формулы и замены переменных позволили вскрыть степенную сущность представленной аппроксимации и определить дифференциальные уравнения, решением которых она является.

PACS: 02.40.Vh, 91.45.Xz

В книге [1, с. 8–10] написано: „Второй пример — динамика одного из основных экономических показателей, индекса Доу–Джонса, перед кризисом 1929 [2] и содержания ионов хлора в источниках перед землетрясением в Кобе в 1995 г. [2]. В обоих случаях она хорошо описывается одной и той же формулой

$$I(t) = A + B(t_c - t)^{\alpha}\left[1 + C\cos\left(\omega \log(t_c - t) - \varphi\right)\right], \tag{1}$$

которая, по-видимому, обусловлена коллективным поведением одного и того же типа. Иначе говоря, мы получили два одинаковых решения уравнений, которых пока не знаем“.

В настоящей заметке мы попытаемся указать простые дифференциальные уравнения, решением которых является функция, описываемая формулой (1).

Для этого преобразуем формулу (1) к виду:

$$I(t) = \mathrm{Re}\left\{A + B(t_c - t)^{\alpha}\left[1 + C_1(t_c - t)^{i\omega \log e}\right]\right\}, \tag{2}$$

где введено обозначение $C_1 = C\exp(-i\varphi)$.

Рассмотрим комплексную функцию

$$\tilde{I}(t) = \tilde{A} + \tilde{B}(t_c - t)^{\alpha} + \tilde{C}(t_c - t)^{\beta} + \ldots, \tag{3}$$

реальной частью которой, в частном случае

$$\tilde{A} = A, \quad \tilde{B} = B, \quad \tilde{C} = BC_1, \quad \beta = \alpha + i\omega \log e, \tag{4}$$

является функция $I(t)$.

В более общем случае сюда можно добавить конечное число степенных одночленов, характеризующих более высокочастотные моды изучаемого процесса. Функции такого типа являются степенными полиномами и их исследование может быть осуществлено в рамках интенсивно развивающейся комплексной степенной геометрии [3–5].

Введем замену переменных

$$I_0 = \tilde{I} - \tilde{A}, \quad \tilde{t} = \ln(t_c - t), \quad \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{1}{t - t_c}. \tag{5}$$

Тогда получаем формулу

$$I_0(\tilde{t}) = \tilde{B}\exp\alpha\tilde{t} + \tilde{C}\exp\beta\tilde{t} \tag{6}$$

с комплексными параметрами, где $\tilde{t}$ может быть названо линейным временем в отличие от реального экспоненциального времени, описывающего соответствующий процесс [5].

Уравнение, решением которого является данная функция, есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка в линейном времени:

$$\frac{d^2 I_0}{d\tilde{t}^2} - (\alpha + \beta)\frac{dI_0}{d\tilde{t}} + \alpha\beta I_0 = 0. \tag{7}$$

Это уравнение эквивалентно системе линейных уравнений первого порядка с двумя неизвестными

$$\frac{dJ}{d\tilde{t}} = (\alpha + \beta)J - \alpha\beta I_0,$$

$$\frac{dI_0}{d\tilde{t}} = J. \tag{8}$$

Полный качественный анализ решений систем линейных комплексных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами выполнен в классических учебниках (см., например, [6]).

Возвращаясь к описанию в рамках рефльного (экспоненциального) времени, получим

$$(t - t_c)\,\frac{dJ}{dt} = (\alpha + \beta)\,J - \alpha\beta I_0,$$

$$(t - t_c)\,\frac{dI_0}{dt} = J. \tag{9}$$

Комплексификация аппроксимационной формулы и замена переменных позволили вскрыть степенную сущность представленной в [1] аппроксимации и определить системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет функция, описываемая формулой (1).

Добавление в формуле (3) конечного числа степенных одночленов принципиально не изменит полученных выводов, а лишь несколько усложнит выкладки.

Это позволяет предложить обобщение формулы (3) с целью определения или аппроксимации все более мелкомасштабных мод изменения основного параметра, описывающего катастрофические события в виде

$$\tilde{I}(t) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{A}_i (t_c - t)^{\alpha_i} \ldots$$

Проведя преобразования, аналогичные выполненным ранее, можно показать, что функция $\tilde{I}(t)\ldots$ может быть приведена к форме, являющейся решением системы линейных дифференциальных уравнений порядка m.

Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант № 03-03-00247а/Б).

Список литературы

[1] *Управление* риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. М.: Наука, 2000. 431 с.
[2] *Johansen A., Sornette D.* et al. // J. Phys. France. 1996. V. 6. P. 1391–1402.
[3] *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, Физматлит, 1998. 288 с.

[4] *Басин М.А.* // Международная междисциплинарная научно-практическая конференция „Современные проблемы науки и образования“. Керчь, 27 июня–4 июля 2001 г. Матер. конф. Ч. 1. Харьков, 2001. С. 12–13.
[5] *Басин М.А.* Компьютеры. Вихри. Резонансы. Волновая теория взаимодействия структур и систем. Ч. 2. СПб.: Норма, 2002. 144 с.
[6] *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 3, пер. и доп. М.: Наука, 1984. 272 с.