06

Прохождение электронов через наноструктуры с параболическим потенциалом в сильном однородном высокочастотном электрическом поле

© А.Б. Пашковский

Федеральное государственное унитарное предприятие НПП „Исток“,
Фрязино, Моск. обл.
E-mail: solidstate10@mail.ru

Поступило в Редакцию 5 декабря 2005 г.

Аналитически найдены установившиеся решения нестационарного уравнения Шредингера с параболическим потенциалом и сильным однородным высокочастотным полем. На их основе методика описания электронного транспорта через системы прямоугольных и треугольных ям и барьеров с сильным однородным высокочастотным полем обобщена на случай структур, включающих в себя параболические потенциалы.

PACS: 73.63.-b

В последние годы резко возрос интерес к изучению нестационарных квантовых процессов в микроструктурах [1–7]. При этом для изучения электронного транспорта в сильном высокочастотном поле основным инструментом остается численное решение нестационарного уравнения Шредингера [6]. Поэтому представляют интерес любые другие способы решения подобных задач. В [7] была предложена сильно уменьшающая объем вычислений [8] и даже пригодная для аналитических исследований [9] методика описания прохождения электронов через системы прямоугольных и треугольных ям и барьеров, основанная на разложении решения задачи по точным установившимся (при $t \to +\infty$) решениям нестационарного уравнения Шредингера с однородным высокочастотным электрическим полем. В работе предполагается обобщить данный подход на случай ям и барьеров параболической формы.

При решении какой-нибудь задачи путем разложения решения по некоему базису принципиальное значение имеет вид базисных функций. Если они представляются в слишком сложной форме, решение задачи с их использованием может оказаться не проще численного и совсем неприменимым для аналитических исследований. Вообще говоря, задача о гармоническом осцилляторе в сильном высокочастотном поле в литературе была исследована весьма подробно [10,11], однако специфика решений совместно с их сложным видом затрудняет непосредственное использование полученных результатов для решения задачи о прохождении. Рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \pm \frac{m\Omega^2}{2}x^2\psi - qEx\psi\cos\omega t, \tag{1}$$

где q, m — заряд и эффективная масса электрона, Ω — собственная частота параболического потенциала (знак $+$ соответствует гармоническому осциллятору), E, ω — напряженность и частота электрического поля.

Пусть волновая функция ψ_0 удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} \pm \frac{m\Omega^2}{2}x^2\psi_0 + \hbar\omega_0\psi_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь $\hbar\omega_0$ — энергия электронов. Два линейно независимых решения (2) можно, например, выбрать в виде [12]:

$$\psi_0 = \exp\left\{-\frac{1}{2}B^{\frac{1}{2}}x^2\right\}\left[F\left[\gamma, \frac{1}{2}, B^{\frac{1}{2}}x^2\right]; xF\left[\frac{1}{2}+\gamma, \frac{3}{2}, B^{\frac{1}{2}}x^2\right]\right], \tag{3}$$

где F — вырожденная гипергеометрическая функция,

$$B = \pm\frac{m^2\Omega^2}{\hbar^2}, \quad A = \frac{2m\omega_0}{\hbar}, \quad \gamma = \frac{1}{4}\cdot\left[1 - \frac{A}{B^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{4}$$

По аналогии с [7] решение (1) ищем в виде

$$\psi(x,t)=\psi_0[x+\beta\cos\omega t]\exp\left\{-i\omega_0 t+\alpha x\sin\omega t+f(t)\right\}, \qquad (5)$$

где $f(t)$ — функция только времени, а α и β — численные коэффициенты. Подставляя (5) в (1), учитывая свойства ψ_0 и приравнивая левую и правую части уравнения в каждый момент времени, видим, что (1) превращается в тождество в случае, когда $f(t)$, α и β удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} i\hbar\omega\alpha &= -qE\pm m\Omega^2\beta,\\ i\omega\beta &= \frac{\hbar}{m}\,\alpha,\\ i\hbar f'(t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\,\alpha^2\sin^2\omega t\pm\frac{m\Omega^2}{2}\,\beta^2\cos^2\omega. \end{aligned} \qquad (6)$$

Отсюда находим

$$\alpha=\frac{iqE\omega}{\hbar(\omega^2\pm\Omega^2)}, \qquad \beta=\frac{qE}{m(\omega^2\pm\Omega^2)}, \qquad (7)$$

$$f(t)=-\frac{iq^2E^2}{4\hbar m(\omega^2\pm\Omega^2)^2}\cdot\left\{(\omega^2\pm\Omega^2)t-(\omega^2\pm\Omega^2)\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right\}. \qquad (8)$$

Надо отметить, что в отличие от случаев свободного пространства и постоянного однородного поля для параболического потенциала решение (5) определено не для всех $\omega>0$. Так, для гармонического осциллятора (знак + в (1)) при $\omega=\Omega$ (т. е. в резонансном случае) коэффициенты α и β обращаются в бесконечность, но только при $\omega=\Omega$, при $\omega=n\Omega$ никаких особенностей нет! Очевидно, в этом случае уравнение (1) должно иметь другое решение (возможно, его можно получить из (5) предельным переходом). Отметим интересный факт, что при выполнении условий

$$\beta=-\frac{i\hbar\alpha}{m\Omega}, \qquad f(t)=\frac{i\hbar\alpha^2}{4m\Omega}\sin 2\Omega t \qquad (9)$$

волновая функция (5) является точным решением нестационарного уравнения Шредингера (1) для линейного осциллятора без высокочастотного поля при любых α.

Пусть теперь электроны с энергией $\varepsilon = \hbar\omega_0$ слева падают на структуру, в которой однородное высокочастотное поле локализовано в области $0 < x < a$ и которая состоит из N отрезков с потенциалами прямоугольной, треугольной и параболической формы. Справа от структуры $(x > a)$ потенциал произвольный. Из всех возможных решений задачи будем искать те, которые гармонически зависят от времени. Тогда волновая функция электронов при $x < 0$ состоит из набора плоских волн

$$\psi(x,t,\varepsilon) = \exp[ikx - i\omega_0 t] + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} D_j \exp\left[-ik_j x - i(\omega_0 + j\omega)t\right], \quad (10)$$

где $k_j = (2m(\omega_0 + j\omega)/\hbar)^{\frac{1}{2}}$.

При $x > a$ волновые функции имеют вид [1,7]

$$\psi_{N+1}(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j \psi_0^{N+1}(x, \omega_0 + j\omega) \exp\left\{\frac{iqEa}{\hbar\omega}\sin\omega t\right\}, \quad (11)$$

а в области $0 < x < a$ на отрезке с номером k:

$$\psi_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j^k \cdot \psi_{E1}^k(x,t,\widetilde{\omega}_0 + j\omega) + B_j^k \cdot \psi_{E2}^k(x,t,\widetilde{\omega}_0 + j\omega), \quad (12)$$

где ψ_{E1}^1 и ψ_{E2}^k — линейно независимые решения (1) в случае параболического потенциала или соответствующие линейно независимые решения нестационарного уравнения Шредингера с однородным высокочастотным полем в случае однородного пространства или однородного постоянного поля [7,13]. При этом соответственно

$$\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 - \frac{(qE)^2}{4m\hbar(\omega^2 \pm \Omega^2)} \quad \text{или} \quad \widetilde{\omega}_0 = \omega_0 - \frac{(qE)^2}{4m\hbar\omega^2}.$$

С учетом того что число слагаемых в (10)–(12) можно ограничить условием $|j| < n$, $qEa/2\hbar\omega)^n/n! \ll 1$ (многофотонные процессы с участием большего, чем n, числа фотонов становятся маловероятными), сшивая волновые функции на границах области, получаем систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\psi_0(0, t, \varepsilon) = \psi_1(0, t, \varepsilon),\\
&\frac{\partial}{\partial x}\,\psi_0(0, t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x}\,\psi_1(0, t, \varepsilon),\\
&\psi_N(a, t, \varepsilon) = \psi_{N+1}(a, t, \varepsilon),\\
&\frac{\partial}{\partial x}\,\psi_N(a, t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x}\,\psi_{N+1}(a, t, \varepsilon),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

которые должны выполняться в каждый момент времени, решение которой [7] и дает искомую волновую функцию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-02-17177).

Список литературы

[1] *Buttiker M., Landauer R.* // Physical Review Letters. 1982. V. 49 (23). P. 1739.
[2] *Frensley W.R.* // Superlattices and Microstructures. 1988. V. 4 (4/5). P. 497.
[3] *Сумецкий М.Ю., Фельтшин М.Л.* // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 53. В. 1. С. 24.
[4] *Chen L.Y., Ting C.S.* // Physical Review B. 1991. V. 43 (3). P. 2097.
[5] *Faist J.* et al. // Appl. Phys. Lett. 1994. V. 64 (9). P. 1144.
[6] *Hagman M.J.* // J. Appl. Phys. 1995. V. 78 (1). P. 25.
[7] *Пашковский А.Б.* // ЖЭТФ. 1996. Т. 109 (5). С. 1779.
[8] *Пашковский А.Б.* // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73 (11). С. 698.
[9] *Голант Е.И., Пашковский А.Б.* // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 120 (2). С. 332.
[10] *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. С. 252.
[11] *Малкин И.А., Манько В.И.* // Теоретическая и математическая физика. 1971. Т. 6 (1). С. 71.
[12] *Джеффрис Г., Свирлс Б.* Методы математической физики. М.: Мир, 1970. С. 229.
[13] *Вьюрков В.В., Рыжий В.И.* // ЖЭТФ. 1980. Т. 78 (3). С. 1159.