04

Нелинейные явления в неидеальных кулоновских системах

© *Г.А. Павлов*

Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка,
Московская область
E-mail: pavlov@icp.ac.ru

Поступило в Редакцию 24 июля 2006 г.

Плазменное эхо в условиях неидеальной плазмы исследовано с помощью теории нелинейного отклика. Рассмотрены ограничения на величину нелинейных функций реакции. Представлена модель для определения квадратичных функций реакции. Изучены условия для экспериментальной реализации временнóго эха. Показано, что эховые явления могут быть вызваны сверхкороткими импульсами поля.

PACS: 52.35.Mw

Известно, что такие явления, как нелинейное взаимодействие волн в среде, нелинейное взаимодействие электромагнитных волн со средой, рассеяние излучения нелинейной средой и соответствующие оптико-акустические эффекты, эховые явления и т. п., изучались в многочисленных экспериментальных и теоретических работах для плазмы и электронного газа со слабым межчастичным взаимодействием (см., например, [1,2]). Теоретическое исследование перечисленных явлений, как правило, базировалось на кинетических уравнениях Власова, Ландау или на соответствующих квантово-механических приближениях.

В то же время нелинейная реакция неидеальной заряженной среды на электрическое и электромагнитное поля не изучена, хотя такая проблема весьма важна. Поэтому данная работа направлена на исследование явлений нелинейного отклика в неидеальной высокотемпературной заряженной среде. Заметим, что в этом случае использование кинетических уравнений некорректно и последовательное теоретическое рассмотрение невозможно из-за значительного межчастичного взаимодействия в среде. Рассмотрим явление, определяемое продольной квадратичной реакцией неидеальной заряженной среды: временное плазменное эхо. Торможение заряженных частиц в среде также кратко обсуждается ниже. Для изучения явлений предложен теоретический подход, основанный на ряде точных соотношений между нелинейными функциями реакции, нелинейной флуктуационно-диссипативной теореме и т. п., полученных с помощью теории нелинейного отклика, аппроксимациях для функций реакции и, естественно, на результатах соответствующего анализа для плазмы и электронного газа со слабым межчастичным взаимодействием. Для расчетов использованы данные по линейным функциям реакции квазиклассических двухкомпонентных кулоновских систем [3].

Временнóе плазменное эхо неидеальной кулоновской системы определяется квадратичным откликом $E^{(2)}(\mathbf{r}, t)$, фурье-образ которого равен (см. [4])

$$E^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\varepsilon^L(\mathbf{k}, \omega)}$$

$$\times \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \chi^{(2)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}') E^{(1)}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} E^{(1)}_{\mathbf{k}', \omega'}, \qquad (1)$$

$$E^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{i4\pi}{k} \frac{\rho^{(0)}(k, \omega)}{\varepsilon^L(k, \omega)},$$

где $E^{(1)}$ — среднее электрическое поле в среде, ε^L — продольная диэлектрическая проницаемость, $\chi^{(2)}$ — продольная квадратичная функция отклика заряд−заряд, $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$, $\omega = \omega' + \omega''$. Плотность внешнего заряда $\rho^{(0)}$ имеет следующий вид [2]:

$$\rho^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \rho_1 e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} \delta(\omega_0 t) + \rho_2 e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}} \delta\big[\omega_0(t - \tau)\big], \qquad (2)$$

что соответствует включению внешних зарядов с амплитудами ρ_1 и ρ_2 в среде с временны́м интервалом $\tau > 1/\gamma$ (γ — декремент затухания лэнгмюровских волн, ω_0 — константа).

Используя определение $E^{(1)}$, можно переписать соотношение для $E^{(2)}$ через функцию реакции $\hat{\chi}^{(2)}$. Эта функция определяет квадратичный отклик на внешнее возмущение

$$\hat{\chi}^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_1, \omega_2) = \chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_1, \omega_2)[\varepsilon^L(\mathbf{k}, \omega)\varepsilon^L(\mathbf{k}_1, \omega_1)\varepsilon^L(\mathbf{k}_2, \omega_2)]^{-1}.$$

Функции $\chi^{(2)}$ и $\hat{\chi}^{(2)}$ описывают продольные нелинейные явления, упомянутые выше. Очевидно, что последовательное теоретическое

Параметры временно́го плазменного эха для кулоновской системы ($k_1a = 0.155$; $k_2a = 0.3$; $\Gamma = e^2/aT$, $r_s = a/a_0$, $a_0 = \hbar^2/me^2$, $a = (3/4\pi n)^{1/3}$, $\nu^{ab}(r) = z_a z_b \left(e^2/r\right)(1 - \exp(-r/\lambda_{ab}))$, $\lambda_{ab} = \hbar(2\pi\mu_{ab}T)^{-1/2}$)

Γ	r_s	T, eV	n, cm^{-3}	ν/ω_p	ω_k/ω_p	γ_k/ω_p
2	1	13.6	$1.61 \cdot 10^{24}$	0.007	1.2	0.011
0.5	1	54.5	$1.61 \cdot 10^{24}$	0.01	1.3	0.035
0.5	0.4	136	$2.52 \cdot 10^{25}$	0.02	1.27	0.04

вычисление $\chi^{(2)}$, $\hat{\chi}^{(2)}$ и других нелинейных функций отклика классических и квантовых неидеальных кулоновских систем практически невозможно в первую очередь из-за неприменимости теории возмущений (при отсутствии малого параметра, $\Gamma \sim 1$, см. таблицу), их компьютерное моделирование для неидеальных систем также не проведено (в отличие от линейных функций реакции [3]). Следовательно, общие ограничения на величины функций отклика, которые касаются их аналитических свойств, областей существования и т. п., имеют важное значение, особенно при построении модельных приближений. Модельный подход, используемый ниже, заключается в следующем. Предложено рассмотреть корректную явную форму функций реакции и корреляционных функций с несколькими подгоночными параметрами. Естественно, что формы аппроксимаций определяются также и физическими соображениями. Параметры аппроксимаций целесообразно находить из известных частотных моментов функций реакций или известных правил сумм для них. Частотные моменты функций реакций и правила сумм для них являются, по существу, термодинамическими характеристиками неидеальных кулоновских систем, поэтому информация о данных характеристиках является сравнительно полной.

Рассмотрим частотные моменты квадратичных функций реакции. Функция $\hat{\chi}^{(2)}$ (которая определяет торможение заряженных частиц) может быть непосредственно исследована по теории нелинейного отклика. Частотные моменты и правила сумм для этой функции найдены с помощью нелинейной флуктуационно-диссипативной теоремы [5,6]. Тем не менее описание временно́го плазменного эха удобно проводить используя функцию $\chi^{(2)}$. Выпишем соотношения, связывающие частотные моменты $\chi^{(2)}$ и $\hat{\chi}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
&\chi_l^1 = \hat{\chi}_l^1, \quad \chi_l^3 = \hat{\chi}_l^3 - 4\hat{\omega}_l^0\hat{\chi}_l^1,\\
&\chi_l^5 = \hat{\chi}_l^5 - 4\hat{\omega}_l^0\hat{\chi}_l^3 - 4\hat{\omega}_l^2\hat{\chi}_l^1 + 16(\hat{\omega}_l^0)^2\hat{\chi}_l^1 \text{ и т. д.;}\\
&\chi_l^n = \int \omega_1^n \mathrm{Re}\,\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1,\omega_1;\mathbf{k}_2,\omega_2)d\omega_1,\\
&\hat{\chi}_l^n = \int \omega_1^n \mathrm{Re}\,\hat{\chi}^{(2)}(\mathbf{k}_1,\omega_1;\mathbf{k}_2,\omega_2)d\omega_1,\\
&\hat{\omega}_l^n = \int \omega^n \mathrm{Re}\,\hat{\sigma}^l(\mathbf{k},\omega)d\omega;
\end{aligned} \tag{3}$$

здесь $\mathrm{Re}\,\chi^{(2)}$, $\mathrm{Re}\,\hat{\chi}^{(2)}$ — нечетные функции ω_1 (если $\omega_2 \to \infty$), которые связаны с соответствующими мнимыми частями с помощью соотношений Крамерса–Кронига; $\hat{\sigma}^l$ — внешняя продольная электропроводность среды, частотные моменты действительной части которой известны (см., например, [7]). Соотноошения (3) удобно использовать для определения $\chi^{(2)}$, основываясь на результатах по классической проблеме моментов [8].

Другой набор частотных моментов для $\chi^{(2)}$, который определяет данную функцию (подгоночные параметры) согласно предлагаемой модели, может быть получен из следующего соотношения [9] (T — температура в энергетических единицах, e — заряд электрона)

$$\int d\omega_2 \mathrm{Im}\left[\frac{\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1,\omega_1;\mathbf{k}_2,\omega_2)}{\omega_1\omega_2} - \frac{\chi^{(2)}(\mathbf{k},\omega;-\mathbf{k}_1,-\omega_1)}{\omega\omega_1} - \frac{\chi^{(2)}(\mathbf{k},\omega;-\mathbf{k}_2,-\omega_2)}{\omega\omega_2}\right] = \pi\,\frac{e}{T}\,\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^L(\mathbf{k}_1,\omega_1)}{\omega_1}\,\frac{k_1}{kk_2}, \tag{4}$$

частотных моментов $\mathrm{Re}\,\sigma^L$ ($\varepsilon^L = 1 + i4\pi\sigma^L/\omega$, σ^L — истинная продольная электропроводность) [7], и свойств данных функций реакции. Кроме того, известны соотношения [4] (ω_p — плазменная частота, m — масса электрона)

$$\begin{aligned}
&\int \omega_1 \mathrm{Re}\,\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1,\omega_1;\mathbf{k}_2,\omega_2\to\infty)d\omega_1 = -\frac{\pi}{2}\,\frac{e}{m}\,\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\,\frac{k_1}{kk_2}\,\mathbf{k}_2\mathbf{k},\\
&\int \omega_2 \mathrm{Re}\,\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1,\omega_1\to\infty;\mathbf{k}_2,\omega_2)d\omega_2 = -\frac{\pi}{2}\,\frac{e}{m}\,\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}\,\frac{k_2}{kk_1}\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Соотношения (4), (5) могут быть использованы для определения подгоночных параметров в простых явных аппроксимациях $\chi^{(2)}$.

Необходимые аппроксимации $\chi^{(2)}$ и $1/\varepsilon^L$ (см. (1)) могут быть выбраны различными способами, например: аппроксимация для квадратичной функции отклика — в форме решения кинетического уравнения Ландау (или Власова) с подгоночными параметрами, параметры определены из уравнений (3), (4) или (5); $\mathrm{Im}\,1/\varepsilon^L$ связана с помощью линейной флуктуационно-диссипативной теоремы с динамическим структурным фактором среды $S(k,\omega)$, аппроксимации для которого хорошо известны (см., например, [3,7]), $\mathrm{Re}1/\varepsilon^L$ найдена с помощью соотношения Крамерса–Кронига.

Определим аппроксимацию $\chi^{(2)}$ плотной высокотемпературной заряженной среды $\chi^{(2)}$ в форме, соответствующей решению уравнения Власова (см., например, [4]) с одним подгоночным параметром ν (эффективная частота столкновений), что обеспечивает правильную асимптотику формы эха в пределе $\Gamma \ll 1$ (и $\nu \to 0$, сравни с [2,10]). Параметр получен из (4). В этом случае, выполняя обратное преобразование Фурье, найдем качественную форму $E^{(2)}(\mathbf{r},t)$, используя ν и нули $\{\varpi\}$ ($\varpi_k = \omega_k - i\gamma_k$) функций $\varepsilon^L(k,\omega)$ (параметр ν зависит от $\{\mathbf{k}_i\}$ так, чтобы $\gamma > \nu$ (см. таблицу)). Поскольку k_1 и k примерно равны по величине (т.е. приблизительно одинаковы нули ϖ_i) и $k = k_2 - k_1 > 0$, имеем

$$E^{(2)}(\mathbf{r},t) \sim e^{i\mathbf{kr} - \gamma_k'/t - \tau'/-\nu\tau'} \cos\left[\omega_k(t-\tau')\right], \quad \tau' = \frac{k_2}{k_2 - k_1}\,\tau; \tag{6}$$

здесь $\gamma_k' = (\gamma_k - \nu)$, $E^{(2)}(\mathbf{r},t)$ пропорционально $\tau\rho_1\rho_2$; член $\nu\tau'$ заметно уменьшает амплитуду эха, которое практически симметрично по времени. Рассмотрим условия реализации соотношения (6) для неидеальной кулоновской системы, используя физические соображения, аналитические свойства линейных функций отклика и данные компьютерного эксперимента для классической двухкомпонентной кулоновской системы. Величина ω_k найдена из результатов компьютерного моделирования $S_e(k,\omega)$ классической двухкомпонентной кулоновской системы по положению хорошо определенного максимума динамического структурного фактора, при этом $\omega_k > \omega_p$ (и слабо зависит от k для достаточно малых k, см. [3,7] и ссылки там). Декременты затухания оценены по соотношению [11]

$$\gamma_k \approx [\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon^L(k,\omega)/\partial\omega|_{\omega=\omega_k}]^{-1} \mathrm{Im}\,\varepsilon^L(k,\omega)|_{\omega=\omega_k}; \quad \mathrm{Re}\,\varepsilon^L(k,\omega_k) = 0,$$

$$S(k,\omega) = \frac{k^2 T \,\mathrm{Im}\,\varepsilon^L(k,\omega)}{4\pi^2 e^2 n\omega |\varepsilon^L(k,\omega)|^2}$$

с использованием результатов компьютерного моделирования $S_e(k,\omega)$ неидеальной кулоновской системы [3] ($\gamma < \omega_k$, см. таблицу; n — концентрация электронов). Другую оценку γ можно получить экстраполируя результаты для ленгмюровских колебаний из [10]. Известно, что второй импульс возмущения ($\sim \rho_2$, см. (2)) вводится в среду до затухания осцилляций функции распределения электронов с характерным временем $\tilde{\tau}$, приближенно равным $(\tilde{\nu} v_T^2 k^2/3)^{-1/3}$ ($v_T, \tilde{\nu}$ — средняя тепловая скорость и частота столкновения электрона) [10]. Поэтому необходимо выполнение условия $\tilde{\tau} > \tau (k < n^{1/3})$. Время действия возмущающих зарядов ($\Delta\tau$) в (2) должно быть достаточно малым по сравнению с τ и другими характерными временами, т. е. в целом можно написать

$$\omega_k > \gamma, \quad \tilde{\tau} > \tau > 1/\gamma. \tag{7}$$

В этом случае реализуются условия, которые позволяют рассматривать явление временно́го плазменного эха в неидеальной кулоновской системе (см. таблицу). Различные способы определения ω_k, γ дают приблизительно одинаковые величины. Заметим, что при другом (чем в таблице) соотношении $\{\mathbf{k}_i\}$ эхо может быть несимметричным по времени и зависеть от других ϖ_i. Эффективность изложенного метода в широком диапазоне параметров зависит от полноты информации о линейных функциях реакции заряженной среды в соответствующих условиях.

Торможение частицы с зарядом Z в среде $\sim \hat{\chi}^{(2)}$ и может быть исследовано с помощью подхода, описанного выше, в аналогичных условиях. Соответствующий квадратичный вклад в торможение пропорционален $\rho^{(2)}$ ($\sim Z^3$, где $\rho = \rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \ldots$ есть плотность заряда, наведенного в среде).

Таким образом, в работе представлен модельный подход для определения квадратичных функций отклика. Подход базируется на использовании явных аппроксимаций для функций реакции с подгоночными параметрами, которые определяются из соответствующих частотных моментов функций отклика. Установлено соотношение между частотными моментами функций отклика $\chi^{(2)}$ и $\hat{\chi}^{(2)}$ (3). С помощью разработанного подхода показано, что эховые явления, определяемые квадратичным откликом на электрическое поле, вероятно, имеют место в неидеальной кулоновской системе. Другие нелинейные явления в неидеальной заряженной среде могут быть изучены аналогично. В заключение, обратим внимание на условия экспериментальной реализации временно́го эха, которые связаны с длительностью времен воздействия возмущающих полей (см. (7)). Так как такие времена должны быть достаточно малыми по сравнению с другими характерными временами явления и если экстраполировать результаты для гипотетической кулоновской системы на экспериментально реализуемую неидеальную плазму, то $\Delta\tau$ должно быть порядка фемтосекунд (или даже аттосекунд) в зависимости от условий в неидеальной плазме. В течение таких промежутков времени полностью ионизованная плазма характеризуется замороженным составом и адекватно моделируется кулоновской системой. Следовательно, нелинейные явления в неидеальной плазме могут быть вызваны действием ультракоротких полей. Возможность реализации таких полей исследована в [12].

Список литературы

[1] *Галеев А.А., Сагдеев Р.З.* // Вопросы теории плазмы. 1973. Т. 7. С. 3.
[2] *O'Neil T.M.* // Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 2420.
[3] *Hansen J.-P., Mc Donald I.R.* // Phys. Rev. A. 1981. V. 23. P. 2041.
[4] *Golden K., Kalman G., Datta T.* // Phys. Rev. A. 1975. V. 11. P. 2147.
[5] *Rommel J.M., Kalman G.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3518.
[6] *Golden K., Kalman G., Silevitch M.* // J. Stat. Phys. 1972. V. 6. P. 87.
[7] *Pavlov G.A.* Transport processes in plasmas with strong Coulomb interactions. Amsterdam: Cordon & Breach Science Publishers, 2000.
[8] *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.
[9] *Ситенко А.Г.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. С. 104.
[10] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.Р.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
[11] *Pines D., Nozieres P.* The theory of quantum liquids. W.A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1966.
[12] *Naumova N., Sokolov I., Nees T., Maksimchuk A., Yanovsky V., Mourou G.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 195003.