07

Квазипериодическая зависимость поля точечного источника от плотности случайной дискретной среды

© Ю.Л. Ломухин, Е.Б. Атутов

Отдел физических проблем при Президиуме Бурятского научного центра СО РАН, Улан-Удэ
E-mail: lom@ofpsrv.bsc.buryatia.ru

В окончательной редакции 31 августа 2006 г.

Используя предложенное авторами условие погружения в плотноупакованную среду, построена теоретическая модель среднего поля точечного источника в случайной дискретной среде. Обнаружено почти периодическое колебание поля с изменением средней плотности среды и осциллирующий характер в дистанционной зависимости.

PACS: 41.20.Jb

Исследование волновых явлений в случайных средах представляет большое практическое и научное значение [1,2]. В [3] показано, что в случае среды с периодическим размещением цилиндрических проводящих элементов среда может быть прозрачной для электромагнитных волн. Данная работа посвящена исследованию этого явления в среде со случайно расположенными рассеивающими цилиндрическими элементами.

Результаты работы могут быть использованы при разработке устройств, содержащих дифракционные решетки, фотонные кристаллы, при разработке систем связи в лесных, ионосферных средах и т. д. [3–7].

Рассчитаем среднее поле в точке $\bar{r}$ элементарного электрического диполя с моментом $\bar{q}$, помещенного в точку $\bar{r} = 0$ в среде с параметрами ε_1, $\mu_1 = 1$, в которой случайным образом расположены цилиндрические элементы V_n. Элементы представляют собой структуры, состоящие из внутреннего цилиндра объемом V_1 с параметрами ε_2, $\mu_2 = 1$ и цилиндрической оболочки объемом V_2 с параметрами ε_3, $\mu_3 = 1$ (рис. 1).

Пусть источник излучает монохроматические волны с $\bar{E} \parallel \bar{e}_z$. Тогда волновое поле можно считать скалярным $u(\bar{r}, t) = u(\bar{r}) \exp(i\omega t)$ и

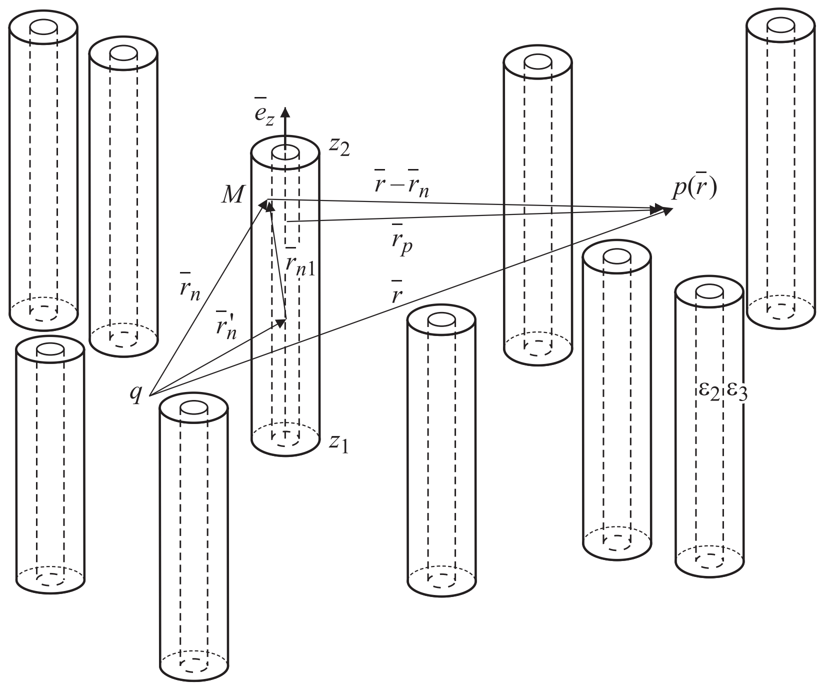

Рис. 1. Модель случайной дискретной среды.

подчиняющимся уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(\bar{r}) + k_1^2 u(\bar{r}) = 0, \tag{1}$$

$k_1^2 = k_0^2 \varepsilon(\bar{r})$, $k_0 = \omega/c$.

Положим

$$\varepsilon(\bar{r}) = \varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}(\bar{r} - \bar{r}_n), \qquad \tilde{\varepsilon}(\bar{r} - \bar{r}_n) = \chi(\bar{r} - \bar{r}_n)\varepsilon_{eff},$$

где

$$\chi(\bar{r} - \bar{r}_n) = \begin{cases} 1, & \bar{r} - \bar{r}_n \in V_n, \\ 0, & \bar{r} - \bar{r}_n \notin V_n, \end{cases} \tag{2}$$

$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_2 V_1 + \varepsilon_3 V_2/(V_1 + V_2) = (a_1/a_2)^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3$, a_1 — радиус внутреннего цилиндра, a_2 — радиус внешнего цилиндра. Переходя от (1) к интегральной форме — ряду Неймана для многократного рассеяния, ограничиваясь борновским приближением [1], с учетом (2) получим

$$u(\bar{r}) = u_0(\bar{r}) + k_0^2\varepsilon_{eff}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{V_n} u_0(\bar{r}'_n + \bar{r}_{n1})G(\bar{r} - \bar{r}'_n - \bar{r}_{n1})d^3\bar{r}_{n1}, \qquad (3)$$

$$u_0(\bar{r}'_n + \bar{r}_{n1}) = q/4\pi \exp\big(-ik_1|\bar{r}'_n + \bar{r}_1|\big)/|\bar{r}'_n + \bar{r}_{n1}|$$

— поле источника в точке M;

$$G(\bar{r} = \bar{r}'_n - \bar{r}_{n1}) = -1/4\pi \exp(-ik_1|\bar{r} - \bar{r}'_n - \bar{r}_{n1}|)/|\bar{r} - \bar{r}'_n - \bar{r}_{n1}|$$

— функция Грина.

Пусть цилиндрические элементы расположены случайно в соответствии с законом Пуассона. Тогда случайным параметром в (3) является $r'_n - a_2$, плотность вероятности значений которого будет по закону Рэлея: $f(r'_n - a_2, \sigma) = 2\pi(r'_n - a_2)\sigma \exp\big(-\pi\sigma(r'_n - a_2)^2\big)$. Здесь σ — средняя плотность расположения цилиндров. Случайным также в (3) является угол $\theta = \arccos(\bar{r}'_n\bar{r}_p)/|\bar{r}'_n||\bar{r}_p|$. Пусть θ имеет равномерное распределение в интервале $0 \div 2\pi$. Усредняя (3) по ансамблю реализаций и учитывая, что основной вклад в рассеянное поле вносят близко расположенные к точке наблюдения элементы, получим среднее поле в виде

$$\langle u(\bar{r}, \sigma)\rangle \approx u_0(\bar{r}) - \frac{k_0^2\varepsilon_{eff}N}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r'_n - a_2, \sigma)$$

$$\times \int_{V_n} u_0(\bar{r}'_n + \bar{r}_{n1})G(\bar{r} - \bar{r}'_n - \bar{r}_{n1})d^3\bar{r}_{n1}d(\bar{r}'_n - a_2)d\theta. \qquad (4)$$

Выражение (4) получено в борновском приближении, кроме того, при $N \to \infty$ оно теряет смысл, поэтому уточним (4) следующим образом. Множитель $\beta = k_0^2\varepsilon_{eff}N/2\pi$ в (4) будем считать неизвестным и определим его из условия погружения в плотноупакованную среду. Для этого положим в (4) $\sigma = \sigma_{np} = 1/4a_2^2$ и $z_1 \to -\infty$, $z_2 \to \infty$, потребуем выполнения равенства

$$\langle u(\bar{r}, \sigma = \sigma_{np})\rangle = u_1(\bar{r}), \qquad (5)$$

где $u_1(\bar{r})$ — поле точечного источника в плотноупакованной среде, которую можно считать сплошной с $\varepsilon = \varepsilon_{eff}$. Тогда

$$u_1(\bar{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{\exp(-ik_2 r)}{r}, \quad k_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_{eff}}. \tag{6}$$

Подставляя (4) и (6) в (5), находим β.

Выполняя приближенное интегрирование при условии $k_1 a_2 \ll 1$, приводим (4) к аналитическому виду:

$$\langle u(\bar{r}, \sigma)\rangle = \frac{q}{4\pi} \frac{\exp(-ik_1 r)}{r} B,$$

где множитель B учитывает влияние случайной дискретной среды:

$$B = 1 + \Big[\exp[-i(k_2 - k_1)r] - 1\Big] \frac{F(\nu_1, \nu_2)}{F(-\infty, \infty)}$$

$$\times \exp\Big[i\sqrt{(z_p/r)^2 + 1}(p - p_{np})\Big] \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(i)^n J_n(\sqrt{(z_p/r)^2 + 1}p)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(i)^n J_n(\sqrt{(z_p/r)^2 + 1}p_{np})}. \tag{7}$$

Здесь $p = k_1/2\sqrt{\sigma}$, $p_{np} = k_1/2\sqrt{\sigma_{np}}$, $1/2\sqrt{\sigma}$ — среднее расстояние между элементами,

$$F(\nu_1\nu_2) = \int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} \exp(-i\pi/2t^2)dt, \quad \nu_1 = \sqrt{4k_1/\pi(r^2 + z_p^2)^{3/2}}\,(z_1 - 1/2z_p)r,$$

$$\nu_2 = \sqrt{4k_1/\pi[r^2 + z_p^2]^{3/2}}\,[z_2 - 1/2z_p]r,$$

$J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка.

Проведем анализ полученного решения. Пусть среда будет достаточно плотной, т. е. $p \approx p_{np}$ и $z_1 \to -\infty$, $z_2 \to \infty$, тогда $\langle u(\bar{r}, \sigma)\rangle \approx \approx q/4\pi \exp\big(-i\mathrm{Re}(k_2)r\big)/r \exp\big(-\mathrm{Im}(k_2)r\big)$, т. е. среднее поле претерпевает дополнительное экспоненциальное затухание по мере углубления в среду (закон Бугера). Напротив, если среда разряженная, т. е. $p \to \infty$, тогда $B \to 1$ и среднее поле испытывает слабое дополнительное затухание. В общем же случае, как следует из (7), среднее поле в случайно-дискретной среде представляет собой результат интерференции двух

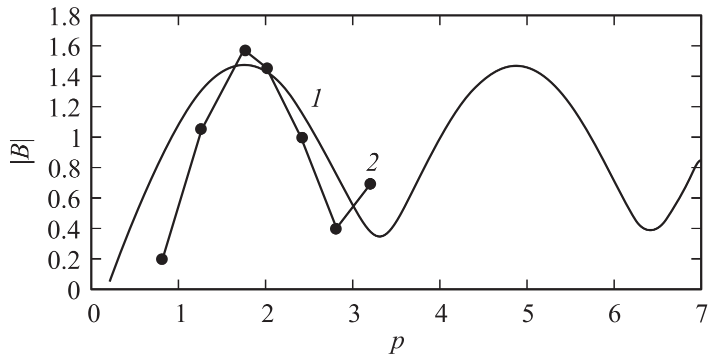

Рис. 2. Зависимость дополнительного ослабления поля точечного источника от плотности среды.

компонент: прямой волны, затухающей с расстоянием по экспоненте, и рассеянной компоненты, слабо зависящей от расстояния. Поэтому среднее поле с углублением в среду будет флуктуировать, при этом максимальный размах флуктуаций наблюдается в области, где прямое и рассеянное поле сравнимы по амплитуде.

Из (7) также следует, что зависимость $|B|$ от p носит квазипериодический характер. В случае идеально проводящих элементов и при $k_1 a_2 \ll 1$ может быть $|B| > 1$ (разрешенная зона) или $|B| < 1$ (запрещенная зона). Физически этот эффект объясняется тем, что с вероятностью 50% в реализациях случайной среды с данной плотностью, в том числе в пределах ближних координационных сфер точки наблюдения при интерференции прямого поля и рассеянных волн, выполняются условия, аналогичные условиям Вульфа–Брэггов.

Из (7) следует также, что данный эффект слабо зависит (при бесконечной длине рассеивателей вообще не зависит) от положения источника и является фундаментальным свойством однородной случайной дискретной среды. Последнее для периодических сред подтверждено экспериментально [3,5].

На рис. 2 (кривая *1*) показана рассчитанная по (7) зависимость $|B|$ от p в случае проводящих цилиндрических элементов в воздухе, имеющих радиусы $a_1 = a_2 = a$, при этом $k_1 a = 0.104$ и $\nu_1 = -0.66$, $\nu_2 = 0.66$, $k_1 r = 23.02$, $z_p = 0$. Здесь же приведена эксперименталььная зависимость $|B|$ от p (кривая *2*), полученная путем измерения среднего поля в случайной среде, состоящей из проводящих $(1/\rho = 3.57 \cdot 10^7\,\mathrm{S/m})$ цилиндрических элементов в воздухе. При этом каждая точка зависимости *2* — это результат усреднения 32 реализаций случайного расположения цилиндров

Из рисунка видно хорошее согласие теоретических и экспериментальных данных, в частности, при $p \approx 1.5$ как расчетное, так и измеренное значение $|B| > 1$ и при $p = 2.7$ (эксперимент) и $p = 3.2$ (расчет) $|B| < 1$.

Таким образом, обнаружен эффект квазипериодической зависимости поля точечного источника от плотности случайной дискретной среды. Установлены окна прозрачности такой среды. Указано на существование области с максимальными флуктуациями поля в дистанционной зависимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-02-97205.

Список литературы

[1] *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 463 с.

[2] *Исимару Л.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. 512 с.

[3] *Ветлужский А.Ю., Ломухин Ю.Л., Михайлова О.Г.* // РЭ. 1998. Т. 43. № 7. С. 797–799.

[4] *Магазинникова А.Л., Якубов В.П.* // РЭ. 1999. Т. 44. № 1. С. 5–9.

[5] *Ломухин Ю.Л., Ветлужский А.Ю.* Методы дополнительного ослабления электромагнитных полей. Новосибирск: Наука, 2003. 136 с.

[6] *Шабанов В.Ф., Ветров С.Я., Шабанов А.В.* Оптика реальных фотонных кристаллов. Жидкокристаллические дефекты, неоднородности. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2005. 240 с.

[7] *Банков С.Е.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 5. С. 533–542.