

09

## Выявление связи между осцилляторами по коротким временным рядам: условие применимости метода моделирования фазовой динамики

© Д.А. Смирнов, И.А. Карпеев, Б.П. Безручко

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 17 июля 2006 г.

Один из самых чувствительных нелинейных методов выявления направленности связи между двумя осцилляторами основан на моделировании их фазовой динамики. Он применим, если наблюдаемые колебания осцилляторов не синхронны и длина временных рядов составляет не менее 50 характерных периодов. Найдено условие применимости метода для более коротких рядов — длиной от 20 до 50 характерных периодов: оценка коэффициента фазовой когерентности (степень синхронности колебаний), рассчитанная по наблюдаемым данным, не должна превышать пороговой величины, зависящей от длины ряда и расстройки частот осцилляторов. Этот результат расширяет возможности определения связи между колебательными системами в условиях нестационарности и дефицита данных.

PACS: 05.45.Xt

**1. Введение.** Задача определения характера связи между двумя системами по временным реализациям наблюдаемых величин, которые могут быть зашумлены и хаотичны, возникает в различных приложениях [1–6]. Особенно важно выявлять достаточно слабую, т.е. не вызывающую синхронизации, связь и ее „направленность“ по временным рядам — порядка нескольких единиц или десятков характерных периодов колебаний. Такая постановка возникает при анализе нестационарных сигналов, что типично для физиологии [1–3], и в тех случаях, когда получение более длинного ряда невозможно, например медленные процессы в геофизике [4,5]. Для достижения успеха в этой сложной ситуации требуется высокая чувствительность метода диагностики

связи, которую обещает слежение за фазами колебаний [7], так как фаза „реагирует“ даже на очень слабое воздействие на осциллятор [8].

Корректно ввести понятие фазы можно для автоколебательных систем с явно выраженным основным ритмом колебаний [8]. Именно такие системы рассматриваются в данной работе. Метод выявления связи, основанный на моделировании фазовой динамики, весьма эффективен [9], но в своем начальном варианте применим только для длинных рядов —  $10^3$ – $10^4$  характерных периодов колебаний при 10–20 точках на периоде. После введения поправок к оценкам связанности и получения формул для доверительных интервалов открылись возможности анализа относительно коротких рядов [10,11], но все же длиной не менее примерно 50 характерных периодов [3]. Однако и с учетом поправок метод не применим, если осцилляторы находятся в режиме фазовой синхронизации или близком к нему. Что касается рядов длиной менее 50 периодов, то в работе показано, что даже для несвязанных осцилляторов (с близкими частотами колебаний) велика вероятность того, что такие короткие сигналы окажутся „почти синхронны“. Это ведет к ошибочным выводам о наличии связи. В работе найдено эмпирическое условие применимости метода для рядов длиной 20–50 характерных периодов.

**2. Описание метода.** Основная идея — оценить, насколько сильно зависит будущая эволюция фазы одной системы от текущего значения фазы другой системы. Для этого по исходным временным рядам от двух систем —  $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_N)\}$ ,  $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_N)\}$  ( $t_i = i\Delta t$ ,  $\Delta t$  — интервал выборки,  $L = N\Delta t$  — интервал наблюдения) — получают временные ряды фаз колебаний —  $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$ ,  $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$ . Имеется в виду „несвернутая“ фаза, значения которой увеличиваются на  $2\pi$  за каждый характерный период. Затем по реализациям фаз строят математическую модель вида

$$\phi_l(t + \tau) - \phi_l(t) = F_l(\phi_1(t), \phi_2(t), \mathbf{a}_l) + \varepsilon_l(t), \quad l = 1, 2, \quad (1)$$

где  $\tau$  — конечный интервал,  $\varepsilon_l(t)$  — шумы с нулевым средним,  $F_l$  — многочлены

$$F_l(\phi_1, \phi_2, \mathbf{a}_l) = \sum_{m,n} [\alpha_{l,m,n} \cos(m\phi_1 + n\phi_2) + \beta_{l,m,n} \sin(m\phi_1 + n\phi_2)], \quad l = 1, 2, \quad (2)$$

$\mathbf{a}_l = (\{\alpha_{l,m,n}, \beta_{l,m,n}\})$  — векторы их коэффициентов. Далее в работе мы принимаем  $\tau$  равным характерному периоду колебаний и используем

многочлены  $F_l$  третьего порядка, следуя работам [9–11]. Оценки коэффициентов  $\hat{\mathbf{a}}_l$  получаем по временным рядам фаз методом наименьших квадратов. Сила воздействия второго осциллятора на первый ( $2 \rightarrow 1$ ) оценивается как

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial F_1(\phi_1, \phi_2, \hat{\mathbf{a}}_1) / \partial \phi_2)^2 d\phi_1 d\phi_2 + r_1,$$

где  $r_1$  — поправка, устраняющая систематическую ошибку [11]. Аналогично определяется  $\gamma_2$  — оценка силы воздействия  $1 \rightarrow 2$ . Точечные оценки  $\gamma_l$  снабжаются 95%-ными доверительными интервалами вида  $[\gamma_l - 1.6\hat{\sigma}_{\gamma_l}, \gamma_l + 1.8\hat{\sigma}_{\gamma_l}]$ , где  $\hat{\sigma}_{\gamma_l}$  — оценки дисперсий величин  $\gamma_l$ , которые рассчитываются с помощью достаточно громоздких формул по временному ряду [11]. Вывод о наличии влияния  $2 \rightarrow 1$  делается при условии  $\gamma_1 - 1.6\hat{\sigma}_{\gamma_1} > 0$ , аналогично — о влиянии  $1 \rightarrow 2$ . Если связь между осцилляторами слаба по сравнению с возвращающей силой, а длина ряда не менее 50 характерных периодов [3], то вероятность ошибки каждого из выводов не более 0.025. Вероятность ошибочного обнаружения влияния одного из осцилляторов на другой при отсутствии связи в действительности — не более 0.05.

Методика не применима, если осцилляторы находятся в режиме фазовой синхронизации ( $\phi_2(t) - \phi_1(t) \approx \text{const}$ ) или близко к нему. Причина состоит в том, что одновременные значения фаз двух осцилляторов являются тогда однозначно или „почти однозначно“ зависящими друг от друга, поэтому в их временных рядах нет достаточной информации, чтобы использовать фазы как независимые динамические переменные при построении эмпирической модели. „Степень синхронности“ характеризуется, например, с помощью коэффициента фазовой когерентности  $\rho \equiv \left| \int_0^{2\pi} \exp(j(\tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1)) p(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) d\tilde{\phi}_1 d\tilde{\phi}_2 \right|$ , где  $p(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2)$  — стационарная плотность распределения вероятностей для „свернутых“ фаз, т.е. определенных на отрезке  $[0, 2\pi]$ ,  $j$  — мнимая единица. Величина  $\rho$  равна 1 для синхронного режима и близка к 0 для несвязанных осцилляторов. По временному ряду можно получить только оценку  $\hat{\rho} \equiv \left| (1/N) \sum_{i=1}^N \exp(j(\phi_2(t_i) - \phi_1(t_i))) \right|$ . Если ряд достаточно длинный, то  $\hat{\rho} \approx \rho$ . В этом случае величина  $\hat{\rho} > 0.6$  свидетельствует о ненадежности

результатов метода [6]. Но, как показано ниже (рис. 1, а), короткие ряды часто оказываются „псевдосинхронными“, т. е. дают большое значение  $\hat{\rho}$  даже для несвязанных осцилляторов. В этом и состоит специфическая трудность анализа связи по коротким рядам.

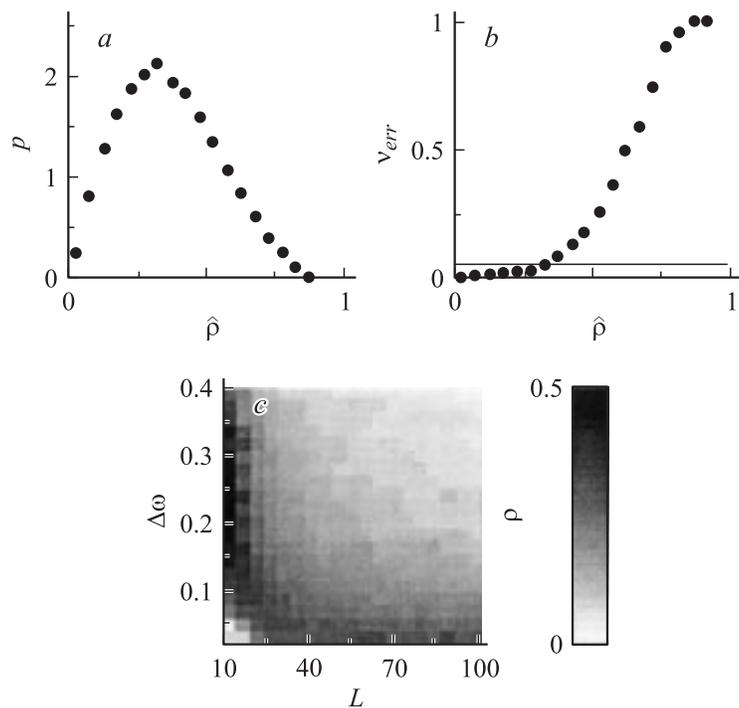
**3. Объект и методика исследования.** В качестве объекта исследования была выбрана эталонная система из двух стохастических генераторов Ван-дер-Поля:

$$d^2x_{1,2}/dt^2 = \mu(1 - x_{1,2}^2)dx_{1,2}/dt - \omega_{1,2}^2x_{1,2} + k_{1,2}(x_{2,1} - x_{1,2}) + \xi_{1,2}(t), \quad (3)$$

где  $k_{1,2}$  — коэффициенты связи, параметры  $\omega_{1,2}$  определяют частоты колебаний,  $\xi_i(t)$  — белые шумы с нулевым средним и автоковариационными функциями  $\langle \xi_i(t)\xi_i(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$ . В численном эксперименте интервал наблюдения  $L$ , интервал выборки  $\Delta t$ , уровень шума  $D$  и расстройка частот генераторов  $\Delta\omega = 2|\omega_2 - \omega_1|/(\omega_1 + \omega_2)$  варьировались в диапазонах значений:  $[10T, 100T]$ , где  $T$  — средний из двух характерных периодов колебаний,  $[0.01T, 0.1T]$ ,  $[0, 0.3]$  и  $[0, 0.4]$  соответственно. Для каждого набора значений этих величин генерировался ансамбль из 5000 временных рядов переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Для получения каждой реализации уравнения (3) интегрировались методом Эйлера с шагом  $h = 0.001\pi$ . Фазы рассчитывались методом построения аналитического сигнала с использованием преобразования Гильберта [8]. Для каждой реализации рассчитывались величины  $\gamma_{1,2}$  с доверительными интервалами и  $\hat{\rho}$ .

Предположим, что оценки  $\gamma_{1,2}$  применимы для выявления связи по коротким рядам, если оценка  $\hat{\rho}$  меньше некоторого порога:  $\hat{\rho} \leq \rho_c$ . Будем делать выводы о наличии связи по одному временному ряду одновременных значений переменных  $x_1$  и  $x_2$  следующим образом. Если  $\gamma_1 - 1.6\hat{\sigma}_{\gamma_1} > 0$  и  $\hat{\rho} \leq \rho_c$ , то делается вывод о наличии влияния  $2 \rightarrow 1$ . Если  $\gamma_1 - 1.6\hat{\sigma}_{\gamma_1} \leq 0$  или  $\hat{\rho} > \rho_c$ , то делается вывод, что о наличии влияния  $2 \rightarrow 1$  ничего определенного сказать нельзя. Аналогично для влияния  $1 \rightarrow 2$ . Таким образом, для сигналов, похожих на синхронные, утверждается только, что невозможно использовать их для определения связи.

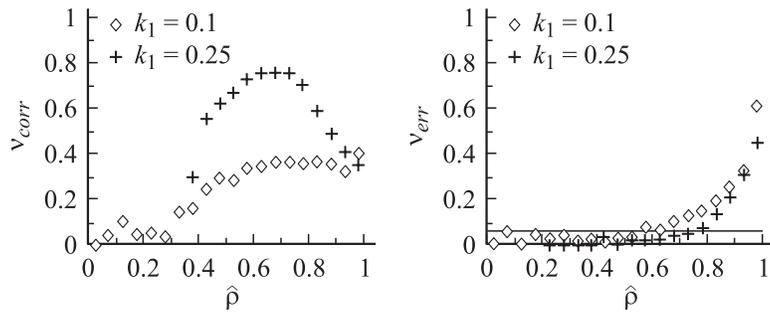
Чтобы определить значение  $\rho_c$ , по каждому временному ряду из ансамбля мы делали вывод о наличии влияния осцилляторов друг на друга, выбирали все ряды, для которых оценка коэффициента фазовой когерентности равна  $\hat{\rho}$  (с погрешностью не более 0.05), и подсчитывали частоты правильных и ошибочных выводов о наличии влияния



**Рис. 1.** Результаты анализа ансамбля реализаций несвязанных осцилляторов (3) с  $\mu = 0.2$ ,  $D = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.1\pi$ : *a* — оценка плотности распределения (гистограмма) величины  $\hat{\rho}$  для длины ряда  $10T$  и  $\Delta\omega = 0.08$  ( $\omega_1 = 0.96$ ,  $\omega_2 = 1.04$ ); *b* — условная частота ошибочных выводов в зависимости от  $\hat{\rho}$ ; *c* — в серых полутонах показана величина  $\rho_c$  в зависимости от длины ряда (в единицах  $T$ ) и  $\Delta\omega$ .

осцилляторов друг на друга:  $v_{corr}(\hat{\rho})$  и  $v_{err}(\hat{\rho})$ . Находили такое  $\rho_c$ , чтобы  $v_{err}(\hat{\rho})$  не превышала 0.05 при любом  $\hat{\rho} \leq \rho_c$  (редкие ошибки и означают применимость метода) для несвязанных осцилляторов. Такой анализ проводился для различных  $L$ ,  $\Delta t$ ,  $D$  и  $\Delta\omega$ .

**4. Результаты.** Для несвязанных осцилляторов ( $k_{1,2} = 0$ ) плотность распределения  $\hat{\rho}$  при  $L = 10T$  и  $\Delta\omega = 0.08$  представлена на рис. 1, *a*. Максимум расположен вблизи  $\hat{\rho} \approx 0.3$ . При уменьшении  $\Delta\omega$



**Рис. 2.** Частоты ошибочных и правильных выводов о характере связи для системы (3) при  $\mu = 0.2$ ,  $D = 0.1$ ,  $\omega_1 = 0.96$ ,  $\omega_2 = 1.04$ ,  $\Delta t = 0.1\pi$  и  $L = 30T$ .

он смещается ближе к единице. Таким образом, для очень коротких рядов и малых расстроек велика вероятность случайного большого  $\hat{\rho}$  — псевдосинхронных сигналов. График  $v_{err}(\hat{\rho})$  представлен на рис. 1, *b*:  $v_{err}$  мала при малых  $\hat{\rho}$  и достигает 1 при  $\hat{\rho} \approx 1$ . Искомое пороговое значение составило  $\rho_c \approx 0.35$ .

Проведя вычисления при различных  $L$  и  $\Delta\omega$ , мы получили зависимость  $\rho_c$  от  $L$  и  $\Delta\omega$  (рис. 1, *c*). В общем  $\rho_c$  увеличивается при уменьшении  $L$  и  $\Delta\omega$  и может достигать 0.5 для рядов длиной  $10T-15T$  и расстроек около 0.1–0.3. Для длин ряда, не меньших  $20T$ , порог не превышает  $\rho_c \approx 0.35$ . Результаты слабо меняются при вариации интервала выборки и уровня шума.

Рассмотрим теперь случай связанных осцилляторов. Здесь кроме малости  $v_{err}$  важна еще значительная величина  $v_{corr}$ , иначе метод неэффективен для выявления связи, хотя и не дает частых ошибок.<sup>1</sup> В качестве примера на рис. 2 представлены результаты для системы (3) с однонаправленной связью:  $k_2 = 0$ ,  $k_1 > 0$ . Выбранным значениям  $\Delta\omega = 0.04$  и  $L = 30T$  соответствует  $\rho_c \approx 0.45$ . При  $\hat{\rho} < \rho_c$  процент ошибочных выводов о наличии воздействия  $1 \rightarrow 2$  не превышает 0.05 (рис. 2, справа). Процент правильных выводов о наличии только воздействия  $2 \rightarrow 1$  велик (вплоть до 0.8) при  $0.25 < \hat{\rho} < \rho_c$  и  $k_1 = 0.25$ . При  $k_1 = 0.25$  ряды с  $\hat{\rho} < 0.25$  в ансамбле отсутствуют. Величина  $v_{corr}$  уменьшается при уменьшении  $k_1$  (рис. 2, ромбики).

<sup>1</sup> Заметим, что сумма  $v_{err} + v_{corr}$  может быть меньше 1, так как значительную долю случаев могут образовать выводы о невозможности что-то сказать о наличии связи.

Численные эксперименты показали, что увеличение уровня шума  $D$  ведет к уменьшению  $\nu_{corr}$ , но не влияет на  $\nu_{err}$ , т.е. сохраняется применимость метода.

Подобные результаты были получены нами и для других значений длины ряда. Однако следует отметить, что она все же не должна быть меньше примерно  $20T$ . Так, ряд длиной  $10T$  практически не пригоден для оценки связанности при рассматриваемых умеренных уровнях шума: хотя ошибки делаются редко, но и правильные выводы столь же редки даже для очень больших величин связи. Другими словами, для столь короткого ряда метод не „чувствует“ наличия связи.

Отметим, что найденные значения  $\rho_c$  (рис. 1, *c*) достаточно универсальны. Выше показано, что они могут использоваться при анализе связанных осцилляторов вида (3) с белым шумом. Однако можно обосновать их применимость и для различных вероятностных свойств шума  $\xi$  аналогично работе [3]. Это позволяет утверждать, что они могут использоваться и для анализа автоколебательных систем с другими нелинейностями, так как последние отразятся именно на свойствах „эффективного шума“  $\xi$  в фазовой динамике.

**5. Выводы.** Показана применимость метода моделирования фазовой динамики для диагностики слабой направленной связи между двумя колебательными системами по временным рядам длиной от 20 характерных периодов и выше. Метод позволяет делать выводы с контролируемой надежностью (вероятность ошибки не более 0.05) при условии, что оценка коэффициента фазовой когерентности  $\rho < \rho_c$ . Определено пороговое значение  $\rho_c$  в зависимости от длины ряда и расстройки частот осцилляторов (рис. 1, *c*). На практике это эмпирическое условие применимости метода важно для рядов длиной 20–50 периодов. Для более длинных сигналов его можно не учитывать. Ряды с меньшей длиной практически не пригодны для получения выводов о наличии связи при наличии даже небольшого уровня шума. Представленные результаты позволяют проводить оценки связи по коротким рядам, что важно в часто встречающихся на практике условиях существенной нестационарности сигналов и дефицита данных.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-02-16305) и программы „Basic Research and Higher Education“ (грант Y2-P-06-02 для молодых кандидатов наук).

## Список литературы

- [1] *Arnhold J., Lehnertz K., Grassberger P., Elger C.E.* // *Physica D.* 1999. V. 134. P. 419–430.
- [2] *Quiñan Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* // *Phys. Rev. E.* 2002. V. 65. P. 041903.
- [3] *Smirnov D.A., Bodrov M.B., Perez Velazquez J.L., Wennberg R.A., Bezruchko B.P.* // *Chaos.* 2005. V. 15. P. 024102.
- [4] *Jevrejeva S., Moore J., Grinsted A.* // *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108. (D21). P. 4677. doi:10.1029/2003JD003417.
- [5] *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2006. Т. 42. № 5.
- [6] *Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // *Chaos.* 2003. V. 13. P. 179.
- [7] *Smirnov D.A., Andrzejak R.G.* // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 71. P. 036207.
- [8] *Пиковский А.С., Розеблум М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2002.
- [9] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 64. P. 045202.
- [10] *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* // *Phys. Rev. E.* 2003. V. 68. P. 046209.
- [11] *Смирнов Д.А.* // *Радиотехника и электроника.* 2006. Т. 51. № 5. С. 569–579.