

01;09

## **О комплексных волнах в невзаимных направляющих структурах**

© Д.Д. Виприцкий, А.В. Назаров, С.Б. Раевский

Нижегородский государственный технический университет  
E-mail: physics@nntu.nnov.ru

Поступило в Редакцию 8 сентября 2006 г.

На примере круглого экранированного волновода с продольно намагниченным аксиальным ферритовым стержнем рассматриваются особенности комплексных волн в невзаимных направляющих структурах.

PACS: 41.20.Jb

Волновые процессы в подавляющем большинстве направляющих структур описываются несамосопряженными краевыми задачами [1]. Собственные значения несамосопряженных краевых задач в общем случае являются [2] комплексными величинами. Комплексность собственных значений приводит к комплексности волновых чисел, являющихся решениями дисперсионных уравнений. Волны с комплексными волновыми числами в отсутствие диссипации энергии в направляющих структурах принято называть [3,4] комплексными волнами (КВ). Такие волны, как показали исследования различных взаимных и невзаимных направляющих структур [5–7], обладают своими принципиальными особенностями. В настоящей работе рассматриваются особенности КВ в направляющих структурах, связанные с несимметричностью их тензора магнитной проницаемости.

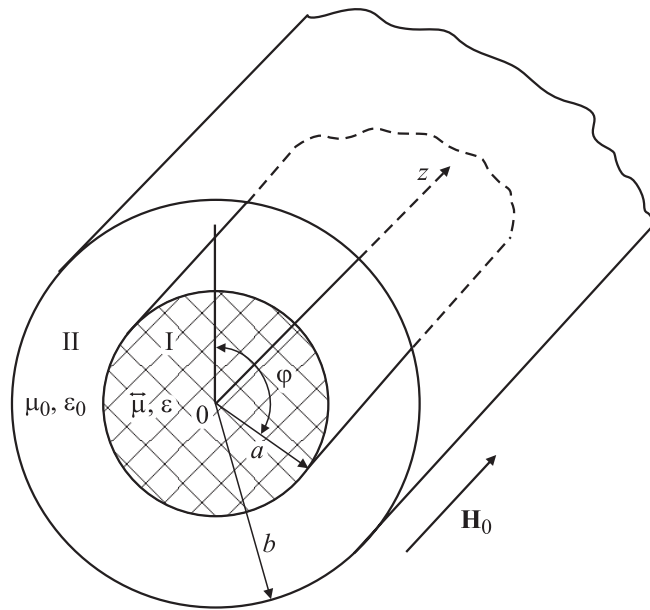


Рис. 1.

Рассмотрим круглый волновод радиусом  $b$  с аксиальным продольно-намагниченным ферритовым стержнем радиусом  $a$  (рис. 1). Ферритовый слой (область I) является анизотропной средой, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_1$  которой скалярная величина, не зависящая от координат, а магнитная проницаемость  $\mu_1$  — несимметричный тензор второго ранга:

$$\mu_1 = \overleftrightarrow{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & -ik & 0 \\ ik & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}, \quad (1)$$

элементы которого в общем случае являются комплексными величинами:  $\mu = \mu' - i\mu''$ ,  $k = k' - ik''$ . При отсутствии магнитных потерь в феррите элементы тензора (1) чисто действительные. В слое между ферритом и экраном (область II) среда изотропная и однородная с параметрами  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ ,  $\mu_2 = \mu_0$ .

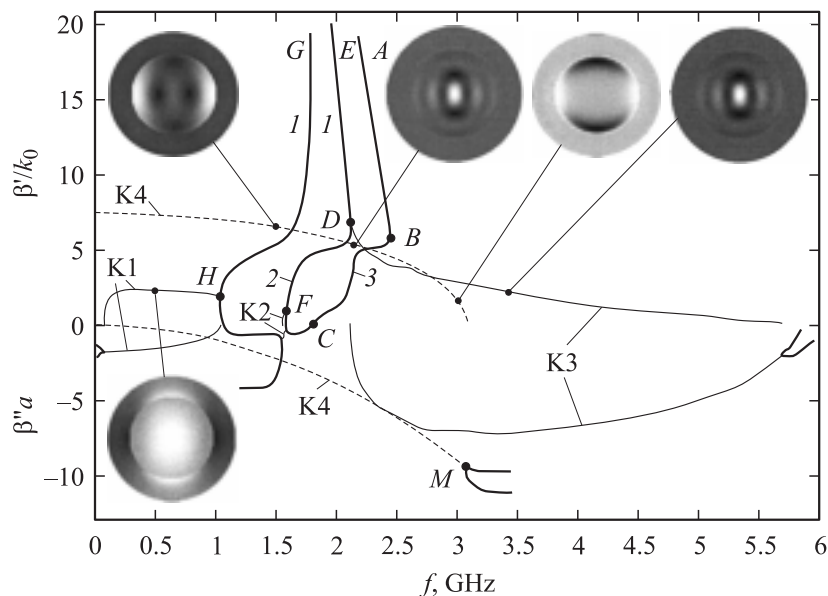


Рис. 2.

Краевая задача, описывающая электромагнитные процессы в данной направляющей структуре, является несамосопряженной, поскольку, во-первых, при учете потерь элементы тензора (1) являются комплексными величинами [1], во-вторых, число граничных условий прямой и сопряженной задач различно, что делает [5] краевую задачу несамосопряженной и в отсутствие потерь. Поскольку собственные значения несамосопряженной краевой задачи, как отмечено выше, в общем случае комплексные, все волновые числа также будут комплексными. При наличии диссипации энергии в средах, образующих структуру, они соответствуют всем типам волн, а при отсутствии ее (диссипации) — спектру КВ.

На рис. 2 представлены результаты численного расчета дисперсии на основе уравнения (4.16) работы [7] для случая обратного подмагничивания (направление внешнего постоянного поля подмагничивания  $\mathbf{H}_0$  противоположно направлению распространения электро-

магнитной волны) при следующих параметрах структуры без потерь:  $a = 20 \text{ mm}$ ,  $b = 30 \text{ mm}$ ,  $f_0 = 1.76 \text{ GHz}$  — частота ферромагнитного резонанса,  $M = M_0 = 103.5 \text{ kA/m}$  — намагниченность насыщения феррита,  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 18$ ,  $\mu_2/\mu_0 = 1$ . Здесь толстыми линиями показаны дисперсионные характеристики, соответствующие обычным распространяющимся либо реактивно затухающим волнам, тонкими и пунктирными линиями — комплексным волнам  $K_i$ . На рисунке приведены также картины распределения плотности потока мощности (белый цвет соответствует областям, где плотность потока мощности имеет наибольшее значение; черный — наименьшее), переносимой волнами в соответствующих частотных точках. Из рис. 2 видно, что дисперсионная характеристика волны 1 терпит разрыв на частоте ферромагнитного резонанса. При этом в дорезонансной области частот (участок  $HG$ ) волна 1 обладает нормальной дисперсией, в зарезонансной (участок  $ED$ ) — аномальной. В точке  $H$  дисперсионная характеристика волны 1 соединяется с дисперсионной характеристикой комплексной волны  $K1$ . В точке  $D$  дисперсионная характеристика волны 1 соединяется с дисперсионной характеристикой комплексной волны  $K3$  и распространяющейся волны 2 с нормальной дисперсией, характеристика которой, в свою очередь, переходит в точке  $F$  в характеристику комплексной волны  $K2$ . Таким образом, точки  $D$ ,  $F$ ,  $H$  являются точками жордановой кратности волновых чисел. На дисперсионной характеристике волны 3 можно выделить два характерных участка, а именно, участок  $AB$ , где волна обладает сильной аномальной дисперсией, и участок  $BC$  с нормальной дисперсией. Характеристики волн 2 и 3 соединяются в запредельной области.

Особое внимание уделим комплексным волнам  $K1$ ,  $K2$ ,  $K3$ , возникающим в точках ( $H$ ,  $F$ ,  $D$ ) жордановой кратности волновых чисел, и комплексной волне  $K4$ , дисперсионная характеристика которой начинается на частоте  $f = 0 \text{ GHz}$  и заканчивается в точке  $M$  объединения характеристик двух запредельных волн. Исследования показали, что волны  $K1$  и  $K2$  обладают всеми свойствами [5]  $KВ$  двухслойного экранированного волновода, являющимися [8] следствием распределенного разворота потока мощности. Поток мощности через поперечное сечение структуры у этих волн складывается из положительного потока внутри ферритового стержня (область I) и такого же по абсолютному значению, но отрицательного потока мощности вне феррита (область II); в результате суммарный поток мощности через поперечное сечение

**Таблица 1.** Волновые числа комплексных волн К4 на частоте  $f = 1.5 \text{ GHz}$ 

Волна	$\beta_i/k_0$	$(\alpha_i a)$
K4 <sub>1</sub>	$6.490533 - 3.613385 \cdot i$	$-2.294264 - 4.046812 \cdot i$
K4 <sub>2</sub>	$6.490533 + 3.613385 \cdot i$	$-2.294264 + 4.046812 \cdot i$
K4 <sub>3</sub>	$-6.490533 - 3.613385 \cdot i$	$-2.294264 + 4.046812 \cdot i$
K4 <sub>4</sub>	$-6.490533 + 3.613385 \cdot i$	$-2.294264 - 4.046812 \cdot i$

волновода равен нулю и энергию эти волны в среднем за период не переносят [5,8,9].

Комплексная волна К3 в отличие от волн К1 и К2, во-первых, обладает аномальной дисперсией, во-вторых, как видно из рис. 2, в ее распределении плотности потока мощности как положительные, так и отрицательные локальные потоки мощности сконцентрированы преимущественно в пределах ферритового стержня. При этом суммарный поток мощности этой волны через поперечное сечение волновода равен нулю. Как показано в [10], решения дисперсионного уравнения собственных волн двухслойного круглого экранированного волновода существуют комплексно-сопряженными парами, соответствуя двум парам КВ, продольные волновые числа которых  $\beta = \beta' + i\beta''$  образуются различными комбинациями (сочетаниями знаков)  $\beta'$  и  $\beta''$ . При этом продольная зависимость поля полагается в виде  $\exp(-i\beta z)$ . На рис. 2 изображена дисперсионная характеристика лишь одной из указанных КВ — с продольным волновым числом  $\beta = \beta' - i\beta''$ , где  $\beta'$  и  $\beta''$  — положительные числа. Помимо этой волны на каждой частоте существуют еще три комплексные волны с продольными волновыми числами

$$\beta = \beta' + i\beta'', \quad \beta = -\beta' - i\beta'', \quad \beta = -\beta' + i\beta''. \quad (2)$$

Рассмотрим комплексные волны К4. В табл. 1 приведены продольные волновые числа (2) этих волн, нормированные на постоянную распространения плоской волны в вакууме  $k_0$ , и поперечные волновые числа в области II, умноженные на радиус ферритового стержня  $a$ , на частоте  $f = 1.5 \text{ GHz}$  для случая обратного подмагничивания. Здесь  $\alpha_i$  — поперечные числа в области II.

Обозначим через  $S_i$  продольную составляющую плотности потока мощности, переносимой волной К4<sub>*i*</sub> через поперечное сечение волновода, вычисляемую по формуле:

$$S_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E r_i H \varphi_i^* - E \varphi_i H r_i^*), \quad (3)$$

где \* — знак комплексного сопряжения;  $i = 1, 2, 3, 4$  — номер комплексной волны К4 из табл. 1. Через  $S_{i,j}$  обозначим продольную составляющую плотности взаимного потока мощности волн К4<sub>*i*</sub> и К4<sub>*j*</sub>, вычисляемую по формуле:

$$S_{i,j} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E r_i H \varphi_j^* - E \varphi_i H r_j^* + E r_j H \varphi_i^* - E \varphi_j H r_i^*). \quad (4)$$

Поток  $P_i$  мощности, переносимой волной К4<sub>*i*</sub> через поперечное сечение структуры (собственный поток), вычисляется как

$$P_i = \int_0^{2\pi} \int_0^b S_i r dr d\varphi, \quad (5)$$

взаимный поток  $P_{i,j}$  мощности волн К4<sub>*i*</sub> и К4<sub>*j*</sub>

$$P_{i,j} = \int_0^{2\pi} \int_0^b S_{i,j} r dr d\varphi, \quad (6)$$

где  $S_i$  и  $S_{i,j}$  вычисляются по формулам (3), (4).

Исследования показали, что собственные потоки мощности волн К4 через поперечное сечение волновода отличны от нуля. При этом волны можно разделить на две пары, внутри каждой из которых волны взаимодействуют между собой. О взаимодействии свидетельствует наличие у этих волн взаимного потока мощности. Взаимодействия между волнами из разных указанных пар нет: их взаимные потоки мощности равны нулю. В табл. 2 приведены значения собственных и взаимных потоков мощности волн К4, нормированные на собственный поток  $\bar{P}$  волны К4<sub>1</sub> на частоте  $f = 1.5$  GHz в сечении  $z = 0$ , вычисленные по формулам (5), (6).

**Таблица 2.** Собственные и взаимные потоки мощности комплексных волн К4 на частоте  $f = 1.5$  GHz

Волна	$(P_i/\bar{P})$	$(P_{i,j}/\bar{P})$
К4 <sub>1</sub>	1	-0.409979
К4 <sub>2</sub>	1	
К4 <sub>3</sub>	-0.994271	0.419474
К4 <sub>4</sub>	-0.994271	

Потоки мощности, переносимые волнами К4<sub>1</sub>, К4<sub>2</sub>, К4<sub>3</sub>, К4<sub>4</sub>:

$$P_1 \sim \exp(-2\beta_1''z), \quad P_2 \sim \exp(2\beta_2''z),$$

$$P_3 \sim \exp(-2\beta_3''z), \quad P_4 \sim \exp(-2\beta_4''z),$$

где  $\beta_i$  — мнимые части продольных волновых чисел, приведенных в табл. 1. Поскольку, как видно из табл. 1,  $\beta_1'' = \beta_2'' = \beta_3'' = \beta_4''$ , из приращений потоков мощности на интервале  $\Delta z$ , записанных в линейном приближении:

$$\Delta P_1 = -2\beta_1'' P_{10} \exp(-2\beta_1''z) \Delta z, \quad \Delta P_2 = 2\beta_2'' P_{20} \exp(2\beta_2''z) \Delta z,$$

$$\Delta P_3 = 2\beta_3'' P_{30} \exp(2\beta_3''z) \Delta z, \quad \Delta P_4 = -2\beta_4'' P_{40} \exp(-2\beta_4''z) \Delta z,$$

следует, что в любом сечении  $z$ , условно принимаемом за  $z = 0$ , при одинаковых исходных (для данного сечения) значениях  $P_{i0}$  потоков мощности справедливы равенства:  $|\Delta P_1| = |\Delta P_2|$ ,  $|\Delta P_3| = |\Delta P_4|$ .

При условии взаимодействия волн К4<sub>1</sub> и К4<sub>2</sub>, К4<sub>3</sub> и К4<sub>4</sub> получается, что насколько величина потока мощности одной из взаимодействующих волн на интервале  $\Delta z$  убывает, настолько величина потока мощности другой волны возрастает, т.е. между взаимодействующими волнами происходит перекачка энергии.

На рис. 3 представлены графики зависимости потоков мощности волн К4<sub>1</sub>, К4<sub>2</sub>, К4<sub>3</sub> и К4<sub>4</sub>, нормированных на величину  $\bar{P}$ , от продольной координаты  $z$  на частоте  $f = 1.5$  GHz при произвольных начальных уровнях  $P_{i0}$  в сечении  $z = 0$ . Из рисунка видно, что поток мощности, переносимой волнами К4<sub>1</sub> и К4<sub>2</sub>, положителен; поток

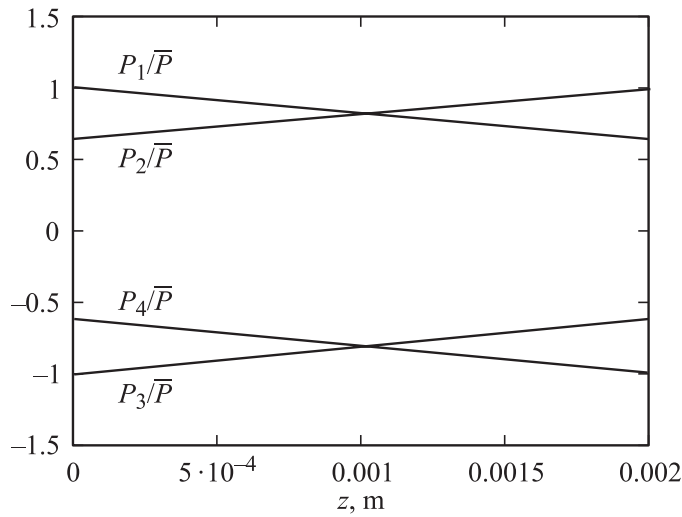


Рис. 3.

мощности, переносимой волнами  $K4_3$  и  $K4_4$ , отрицателен. При этом, пройдя одно и то же расстояние  $z_0$ , поток волны  $K4_1$  уменьшается, а поток волны  $K4_2$  увеличивается на одинаковую величину. Такой же эффект наблюдается у волн  $K4_3$  и  $K4_4$ . Поэтому можно говорить о том, что по мере распространения волн  $K4_1$  и  $K4_2$  ( $K4_3$  и  $K4_4$ ) происходит перекачка энергии из волны  $K4_1$  в волну  $K4_2$  (из волны  $K4_3$  в волну  $K4_4$ ).

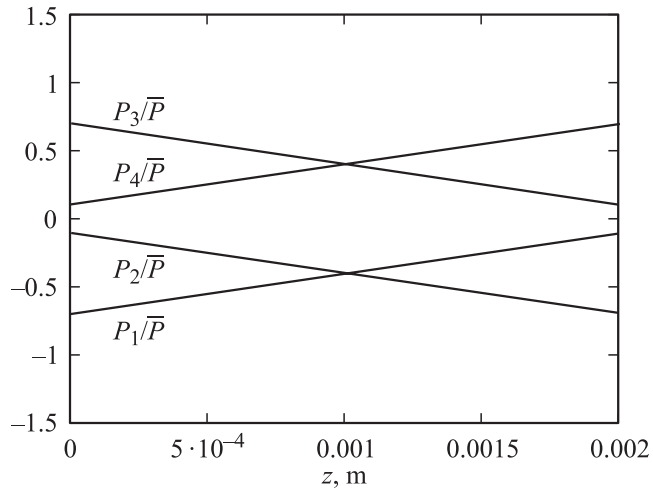
С увеличением частоты распределение в поперечном сечении плотности потоков мощности волн  $K4$  (рис. 2) меняется, а величины самих потоков уменьшаются по абсолютному значению и становятся равными нулю на частоте  $f \cong 2.235$  GHz. При этом распределение плотности потока мощности оказывается идентичным волнам  $K3$  с нулевым потоком, а взаимные потоки мощности  $P_{1,2}$  и  $P_{3,4}$  обращаются в нуль, что говорит о прекращении взаимодействия волн  $K4_1$  и  $K4_2$ ,  $K4_3$  и  $K4_4$ . При переходе через частоту  $f = 2.235$  GHz собственные потоки мощности волн  $K4$  меняют знак. В табл. 3 приведены значения собственных и взаимных потоков мощности волн  $K4$ , нормированных на величину  $\bar{P}$  на частоте  $f = 3$  GHz.



**Таблица 3.** Собственные и взаимные потоки мощности комплексных волн К4 на частоте  $f = 3 \text{ GHz}$

Волна	$(P_i/\bar{P})$	$(P_{i,j}/\bar{P})$
К4 <sub>1</sub>	-0.695241	-0.117958
К4 <sub>2</sub>	-0.695241	
К4 <sub>3</sub>	0.706032	0.113334
К4 <sub>4</sub>	0.706032	

На рис. 4 представлены графики зависимости потоков мощности волн К4<sub>1</sub>, К4<sub>2</sub>, К4<sub>3</sub> и К4<sub>4</sub>, нормированных на величину  $\bar{P}$ , от продольной координаты  $z$  при произвольных начальных уровнях  $P_{i0}$  на частоте  $f = 3 \text{ GHz}$ . Из рис. 4 видно, что баланс энергий при взаимодействии волн К4<sub>1</sub> и К4<sub>2</sub>, К4<sub>3</sub> и К4<sub>4</sub> так же, как и на частоте  $f = 1.5 \text{ GHz}$  (рис. 3), выполняется. То есть можно утверждать, что во всем частотном диапазоне существования комплексных волн К4 по мере их распространения в волноводе происходит перекачка энергии из волн К4<sub>1</sub> и К4<sub>3</sub> в волны К4<sub>2</sub> и К4<sub>4</sub> соответственно.



**Рис. 4.**

Выводы:

1. В круглом экранированном волноводе с аксиальным ферритовым стержнем существуют 3 типа собственных КВ: 1) волны с нулевым потоком мощности, аналогичные КВ круглого двухслойного экранированного волновода с диэлектрическими слоями; 2) комплексные волны с аномальной дисперсией и нулевым потоком, физическая природа которых объясняется внутренним (в феррите) распределенным разворотом мощности, связанным с процессами перемагничивания ферритовой среды; 3) КВ с ненулевым потоком мощности через поперечное сечение волновода.

2. Комплексные волны с ненулевым потоком мощности существуют за счет парного взаимодействия, в результате которого происходит перекачка энергии из одной волны в другую. При этом комплексные волны внутри взаимодействующей пары не удовлетворяют условию ортогональности в энергетическом смысле: их взаимный поток мощности отличен от нуля. Отсутствие ортогональности связано с несимметричностью тензора (1). Условие ортогональности выполняется лишь в одной точке частотного диапазона, где прекращается взаимодействие КВ, и их взаимный и собственные потоки мощности обращаются в нуль.

Общий важный вывод: в невзаимных направляющих структурах могут существовать собственные комплексные волны, не удовлетворяющие условию ортогональности в энергетическом смысле, взаимные потоки мощности которых отличны от нуля. При обращении взаимного потока мощности двух КВ в нуль собственные потоки мощности комплексных волн К4 становятся равными нулю.

## Список литературы

- [1] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1996. 443 с.
- [2] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 525 с.
- [3] *Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1972. Т. 15. № 12. С. 112–116.
- [4] *Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1972. Т. 15. № 12. С. 1926–1931.
- [5] *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* Слоистые металлодиэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988. 247 с.

- [6] *Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Линейная макроскопическая электродинамика. М.: Радио и связь, 2001. Т. 2. 575 с.
- [7] *Раевский А.С., Раевский С.Б.* Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. М.: Радиотехника, 2004. 110 с.
- [8] *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1983. Т. 26. № 9. С. 1041–1044.
- [9] *Веселов Г.И., Платонов Н.И., Семенов С.Г.* // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 4. С. 887–888.
- [10] *Раевский С.Б.* // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 5. С. 952–962.