01;09

Геометрический метод реконструкции систем по экспериментальным данным

© *Е.В. Никульчев*

Московский государственный университет приборостроения и информатики
E-mail: nikulchev@mail.ru

В окончательной редакции 28 июля 2006 г.

Предложен метод реконструкции динамических эволюционных уравнений, редуцированных на центральное инвариантное многообразие на основе экспериментальных данных управляемых объектов. Метод учитывает групповые преобразования фазовых траекторий, сохраняющих топологическую эквивалентность локальных областей.

PACS: 05.45.-a

При проектировании управляемых систем закладываются гипотезы о физических процессах, которые могут не подтверждаться при реализации устройств — в выходных процессах наблюдаются регулярные или хаотические колебания. Таким образом, моделирование качественного динамического поведения функционирующих управляемых систем по экспериментальным данным является актуальной задачей. Полученные в результате моделирования эволюционные уравнения могут быть использованы для создания, например, второго контура управления, обеспечивающего устранение периодических орбит, или имитационных моделей, предназначенных для исследования и синтеза систем управления.

В настоящее время существует ряд подходов к глобальной реконструкции моделей по экспериментальным данным [1], основанный на использовании теоремы Такенса (Takens), согласно которой восстанавливаемый фазовый портрет топологически эквивалентен аттрактору. Однако практическое использование получили в основном методы идентификации коэффициентов разложений Тейлора и Лежандра [1]. В значительном количестве работ, посвященных построению нелинейных моделей, не обосновывается способ выбора нелинейностей, кроме того, предлагаемые алгоритмы тестируются на модельных примерах.

Для реконструкции моделей по восстановленному аттрактору предлагается использовать геометрические свойства решений дифференциальных уравнений. Разработан метод, позволяющий на основании анализа областей фазового портрета, в которых восстановленные траектории близки к предельному циклу, на основании нахождения группы преобразования, строить редуцированную на центральное инвариантное многообразие модель.

Пусть исследуемые экспериментальные данные являются измеряемыми процессами, порожденными нелинейными уравнениями вида

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

где f — $\mathbf{C}^r$-гладкая относительно всех своих аргументов вектор-функция, определенная на $D \times U$; x — n-мерный вектор состояний системы из $D \subseteq X$; D — область в многообразии X; u — p-мерный вектор допустимых управлений $U \subseteq \mathbf{R}^p$ $(p \leqslant n)$; $\dot{x} \in T_x X$; $T_x X$ — касательное пространство к X в точке x, определяемой допустимыми управлениями; t — непрерывное время.

Также будем рассматривать декретный аналог уравнения (1):

$$x(t+1) = f\big(x(t), u(t)\big). \tag{2}$$

Для обоснования выбора структуры нелинейной модели используем теорию центрального многообразия [2]. Рассмотрим случай редукции на центральное инвариантное многообразие непрерывных моделей для систем с дискретным временем, проведем аналогию. Система, в которой наблюдаются колебания, имеет в линеаризованном уравнении корни характеристического уравнения справа, слева и на мнимой оси. Пусть при $u = u^0$ система (1) имеет экспоненциально устойчивую периодическую траекторию. Построим отображение Пуанкаре, при этом пересечение периодической траектории с секущей плоскостью является неподвижной точкой отображения O_0 $(x = x_0)$. Тогда существует неподвижная точка O_u, которая остается устойчивой для всех $|u - u^0| < \delta_0 \leqslant \delta$, так как корни характеристического уравнения $\det|A(u) - \lambda I| = 0$, где $A(u) = \big[\partial f(x(u), u)/\partial x\big]$, непрерывно зависят от u. В пространстве параметров можно построить максимальное открытое множество, которое является областью грубой устойчивости периодической траектории.

Система (1), согласно теореме Гробмана–Хартмана (Grobman–Hartman) [3] и теореме Шильникова–Овсяникова (Shilnikov–Ovsyannikov) [2], может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\dot{y} &= By + f_1(x, y, z),\\ \dot{z} &= Cz + f_2(x, y, z),\\ \dot{x} &= Ax + \psi_0(x, y, z),\end{aligned} \tag{3}$$

где $\operatorname{spectr} A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ $(j = \overline{1, m})$; $\operatorname{spectr} B = \{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_k\}$, $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ $(j = \overline{m+1, k})$; $\operatorname{spectr} C = \{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n\}$, $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ $(j = \overline{k+1, n})$; $x \in \mathbf{R}^m$; $y \in \mathbf{R}^k$; $z \in \mathbf{R}^{n-m-k}$, $\mathbf{C}^r$ — функции ψ_0, f_1 и f_2 вместе со своими первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Предполагаем, что правые части отображения (а также их производные) могут непрерывно зависеть от управлений u. В этом случае многообразия и слоения будут непрерывно зависеть от u вместе со всеми их производными.

Заметим, что если правая часть системы гладко зависит от u, центральное многообразие также гладко зависит от u. Таким образом, если функции ψ_0, f_1 и f_2 являются $\mathbf{C}^r$-гладкими относительно (x, y, u), то многообразие может быть выбрано в виде $\mathbf{C}^r$-гладкой функции от (x, u). Этот результат получается формальным добавлением к системе (1) уравнения $\dot{u} = 0$. Если теперь рассматривать (x, u) в качестве нового состояния x, то вид расширенной системы будет аналогичен исходной системе.

В соответствии с теоремой Тураева (Turaev) [2] о центральном многообразии, в малой окрестности O существует локальное центральное многообразие, содержащее множество всех траекторий, остающихся в малой окрестности точки O при всех значениях времени $t \in (-\infty, +\infty)$. Локальное центральное многообразие задается уравнением $\{y = 0, z = 0\}$:

$$\dot{x} = Ax(t) + \Psi_0(x), \tag{4}$$

где $\Psi_0(x, t)$ предлагается определять на основании построения группы симметрий по преобразованиям, найденным по восстановленному аттрактору.

Неоднозначно определяемые функции, представляющие собой центральное многообразие, имеют одинаковые инфинитезимальные образующие, а следовательно, локально могут быть описаны одной группой симметрий [4]. Это справедливо в каждой точке, траектория которой остается в малой окрестности O при всех значениях t. Следовательно, рассматриваемая система может быть идентифицирована на основании инвариантов центрального многообразия — групп преобразований фазовых траекторий.

Аналогичны построения для систем с дискретным временем. Пусть система имеет размерность $(n+1)$; таким образом, секущая n-мерна. Пусть m мультипликаторов периодической траектории лежат на единичной окружности, k мультипликаторов лежат строго внутри единичной окружности, а остальные $(n-m-k)$ мультипликаторов строго больше 1 по абсолютной величине. Отображение Пуанкаре вблизи неподвижной точки O записывается в виде, аналогичном (2), с той разницей, что $\operatorname{spectr} A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $|\lambda_j| = 1$ $(j = \overline{1, m})$; $\operatorname{spectr} B = \{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_k\}$, $|\lambda_j| < 1$ $(j = \overline{m+1, k})$; $\operatorname{spectr} B = \{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_k\}$, $|\lambda_j| > 1$ $(j = \overline{m+1, k})$. Для дискретной системы локальное центральное многообразие определяется уравнениями

$$x(t+1) = Ax(t) + \Psi_0(x), \tag{5}$$

где $\Psi_0(x)$ можно определять на основании групп симметрий по состоянию системы, построенной по восстановленному аттрактору.

Для реконструкции нелинейной системы в виде (4), (5) предлагается выделение локальных областей фазовых траекторий, близких к периодическим, и построение конечнопараметрических преобразований, переводящих одну область в другую, т. е. построение группы симметрий фазовых траекторий, которая характеризуется преобразованием графиков

$$\operatorname{graph}\left\{\varphi_1\big(x(t), u(t)\big)\right\} \to \operatorname{graph}\left\{\varphi_2\big(x(t), u(t)\big)\right\}.$$

Для управляемых систем с нелинейной динамикой можно воспользоваться классической техникой группового анализа, изложенной, например, в [5]. Основы техники вычисления групп симметрий для дискретных моделей определены в [6].

Проиллюстрируем изложенные идеи, используя в качестве объекта моделирования реальную управляемую систему теплообмена. Система состоит из бесконтактного теплообменника, на вход которого в качестве теплоносителя подается пар, теплоприемником является сильновязкая

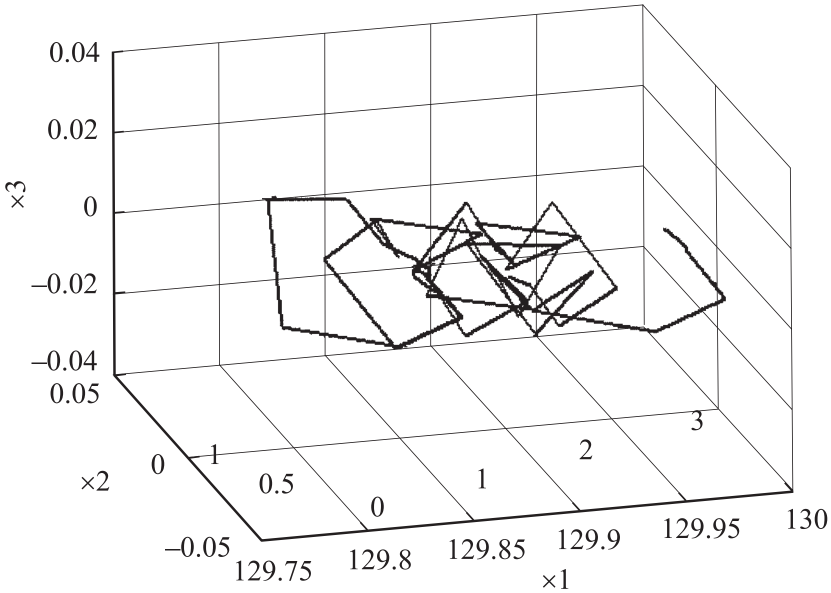

Рис. 1. Восстановленный аттрактор теплообменного процесса.

среда. Сложность задачи состоит в нелинейности процесса теплообмена и неравномерном нагреве вязкой среды. Цель моделирования состояла в построении дополнительного контура управления, учитывающего реальное поведение процесса.

В качестве исходных данных использован процесс изменения температуры в режиме нормального функционирования, при этом показания датчика температуры записаны в градусах Цельсия. Восстановленный по экспериментальным данным аттрактор, построенный в соответствии с теоремой Такенса по методам, приведенным в [1], показан на рис. 1. Размерность реконструкции равна 3.

Как известно, для тепловых явлений имеют место аффинные преобразования локальных областей решений, что подтверждается видом фазового портрета. Выделим локальные участки фазовых портретов, соответствующих траекториям, близким к периодическим. Теперь за-

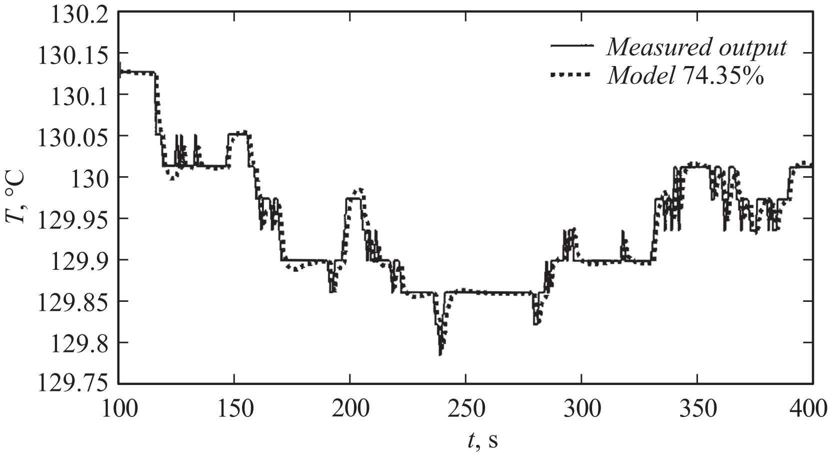

Рис. 2. Сравнение динамики эксперимента и реконструированной модели.

дача состоит в получении вида замены координат, представляющей собой диффеоморфизм (в случае гладкой структуры) или гомеоморфизм (в топологической ситуации) фазовых пространств. Описание преобразований всех периодических точек остается открытой проблемой.

Таким образом, из единственности решений дифференциальных уравнений следует, что нули векторного поля являются неподвижными точками соответствующего потока. На основании известного экспоненциального представления аффинных преобразований симметрий на основании теоремы Ли и формулы Хаусдорфа получим вид функции $\Psi_0(x, t)$:

$$\Psi_0(x, t) = \alpha t + \beta.$$

Заметим, что построенные преобразования дают существенную, хотя и не полную информацию о гладкой локальной эквивалентности. Очевидно, что изменение линеаризации не меняет отображение перехода, если параметр изменен соответствующим образом. Также изменение базовой точки приводит к замене отображения перехода на эквивалентное.

Идентификация параметров системы в форме (4) с помощью метода наименьших квадратов дает следующий результат:

$$\dot{x} = Ax + \Psi_0,$$

$$y = Cx,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.9974 & 0.0238 & 0.0294 \\ -0.0047 & 0.9624 & -0.7471 \\ 0.0009 & 0.0160 & 0.2256 \end{bmatrix}, \qquad \Psi_0 = \begin{bmatrix} 0.0030 \\ -0.0071 \\ -0.0006 \end{bmatrix} (t + 10),$$

$$C = [11.8570 \quad -0.1383 \quad -0.2127].$$

Здесь y — выходной (измеряемый) процесс изменения температуры. На рис. 2 приведено сравнение динамики исходной системы и реконструированной модели.

Отметим, что при определении преобразования имеет смысл рассматривать сохранение структурной устойчивости для потоков. На основе эквивалентности всех возмущений при построении модели считается, что из локальной топологической эквивалентности следует сохранение структурной устойчивости, при этом преобразование может быть достаточно близким к тождественному для малых возмущений.

Таким образом, предложен геометрический метод реконструкции по экспериментальным данным динамических уравнений управляемых систем, редуцированных на центральное инвариантное многообразие.

Список литературы

[1] *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / Под ред. В.С. Анищенко. Пер. с англ. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 529 с.

[2] *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В.* и др. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Пер. с англ. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 415 с.

[3] *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Факториал УРСС, 1999. 767 с.

[4] *Никульчев Е.В.* // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 5. С. 6–14.

[5] *Яковенко Г.Н.* // Электронный журнал: „Дифференциальные уравнения и процессы управления“ (http://www.neva.ru/journal/). 2002. № 3. С. 40–83.

[6] *Никульчев Е.В.* // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. № 3. С. 72–80.