

01;04

## Точное решение нелинейных уравнений, описывающих стационарный профиль ионизационных волн в газоразрядной плазме

© А.Е. Дубинов, М.А. Сазонкин

Саровский государственный физико-технический институт  
E-mail: dubinov@rol.ru

Поступило в Редакцию 27 сентября 2006 г.

Получено точное решение системы нелинейных уравнений, описывающих стационарный профиль ионизационной волны в газоразрядной плазме инертных газов.

PACS: 52.35.Lv, 52.80.Nc

Ионизационные волны (страты) являются одним из основных волновых процессов в плазме прямооточных газовых разрядов [1,2]. Они изучаются экспериментально уже много десятилетий. Стоячие и медленно бегущие страты можно наблюдать без специальных устройств и можно отметить, что они образуют красивейшую пространственно-периодическую картину свечения плазменного столба. Вместе с тем изучение и теоретическое описание страт важно хотя бы потому, что они существенно влияют на характеристики работы лазеров на тлеющем разряде [3].

Теория страт достаточно сложна, их профиль описывается системами нелинейных уравнений в частных производных [4], точно решить которые без предварительной линеаризации почти всегда представляется невозможным. Тем не менее в данной работе представлено точное решение одной системы нелинейных уравнений, описывающих стационарный профиль периодической ионизационной волны.

Будем исходить из следующей системы, полученной в [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial \ln N}{\partial x} = \frac{T_{e0}}{U_i} \left( N - \frac{1}{N} - \frac{3}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} - N(\exp \Theta - 1) = c \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (2)$$

с обозначениями  $\Theta = U_i(T_e - T_{e0})/T_{e0}^2$ ,  $N = n/n_0$ ,  $x = E_0 U_i z / T_{e0}^2$ ,  $t = \tau / t_0$ ,  $c = t_0 \mu_i E_0^2 U_i^2 / T_{e0}^3$ , где  $U_i$  — ионизационный потенциал,  $T_e$  — электронная температура,  $n$  — концентрация частиц плазмы,  $t_0$  — их время жизни,  $E$  — электрическое поле,  $\mu_i$  — подвижность ионов, координата  $z$  направлена вдоль оси разряда, а индекс „0“ соответствует невозмущенному состоянию плазмы столба. Уравнение (1) описывает баланс энергии электронов, а уравнение (2) следует из уравнений непрерывности заряженных частиц.

В соответствии с [6] можно считать, что в положительном столбе плазмы инертных газов при давлении в несколько Торр выполняются  $T_{e0}/U_i \ll 1$  и  $c \ll 1$ . Тогда система уравнений (1)–(2) сведется к следующей:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial \ln N}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} - N(\exp \Theta - 1) = 0, \quad (4)$$

которая в [6] исследовалась в линеаризованном виде и решалась численно.

Получим точное общее решение системы уравнений (3)–(4) в виде стационарной волны, бегущей со скоростью  $V$ . Перейдем в систему отсчета,двигающуюся вместе с волной. Тогда можно провести замену переменных согласно:

$$\xi = x - Vt, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}. \quad (5)$$

В итоге система уравнений в частных производных (3)–(4) сведется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей стационарный профиль волны:

$$\frac{d}{d\xi} \left( N \frac{d\Theta}{d\xi} \right) - \frac{d \ln N}{d\xi} = 0, \quad (6)$$

$$-V \frac{dN}{d\xi} - N(\exp \Theta - 1) = 0. \quad (7)$$

Исключим из (6)–(7) приведенную температуру  $\Theta$ , выразив ее из 2-го уравнения системы

$$\Theta = \ln \left( 1 - \frac{V}{N} \frac{dN}{d\xi} \right) \quad (8)$$

и подставив в 1-е. В результате получим следующее нелинейное автономное дифференциальное уравнение 3-го порядка:

$$\begin{aligned} VN^2(N - VN')N''' + V^2N^2N''^2 \\ - 2VN^2N'N'' + V(V + N)N'^3 - 2VNN'^2 + N^2N' = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

в котором штрих обозначает дифференцирование по  $\xi$ .

Автономность уравнения позволяет понизить его порядок путем замены  $N' = p$ ,  $N'' = pp'$ ,  $N''' = p^2p'' + pp'^2$  [7], считая, что  $p(N) = p(N(\xi))$ :

$$\begin{aligned} VN^2p^2(N - Vp)p'' + VN^3pp'^2 \\ - 2VN^2p^2p' + V(V + N)p^3 - 2VNP^2 + N^2p = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

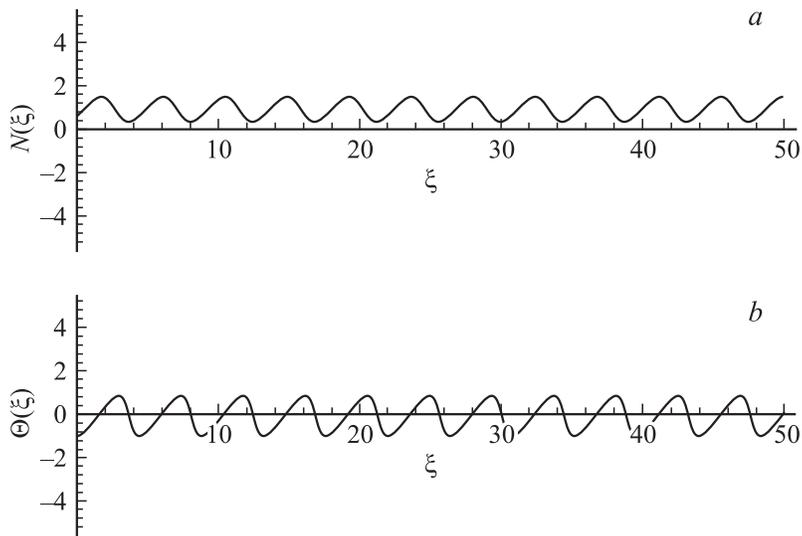
где штрих обозначает уже дифференцирование по  $N$ . Будем искать решение уравнения (10) в виде

$$p(N) = \frac{N}{V} \left\{ W_0 [N^{-V/N} \exp(f(N))] + 1 \right\}, \quad (11)$$

где  $W_0(x)$  — основная действительная ветвь сравнительно новой многозначной  $W$ -функции Ламберта [8], являющейся по определению обратной функцией к  $y = x \exp x$ . Подстановка (11) является ключевым моментом, позволяющим аналитически решить дифференциальное уравнение (10); подобные подстановки, насколько нам известно, ранее при решении нелинейных уравнений не применялись.

Для использования (11) в (10) необходимо знать выражения 1-й и 2-й производных  $W$ -функции Ламберта. Эти производные можно вычислить, применяя правило дифференцирования обратных функций:

$$\frac{dW_0(x)}{dx} = \frac{1}{x} \frac{W_0(x)}{1 + W_0(x)}; \quad \frac{d^2W_0(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{W_0^2(x)[2 + W_0(x)]}{[1 + W_0(x)]^3}. \quad (12)$$



Профили ионизационной волны:  $a$  — профиль безразмерной концентрации  $N(\xi)$ ;  $b$  — профиль приведенной температуры  $\Theta(\xi)$ .

Подставляя (11) в (10) с помощью (12), получим простое уравнение для вспомогательной функции  $f(N)$ :

$$N \frac{d^2 f(N)}{dN^2} + 2 \frac{df(N)}{dN} = 0, \quad (13)$$

общее решение которого, как легко получить, есть

$$f(N) = C_1 + \frac{C_2}{N}. \quad (14)$$

Возвращаясь к  $p(N)$ , а затем к  $N(\xi)$ , окончательно запишем общее решение уравнения (9) с тремя постоянными интегрирования  $C_{1,2,3}$ :

$$\xi - C_3 = \int \frac{dN}{\frac{N}{V} \left\{ W_0 [N^{-V/N} \exp(C_1 + \frac{C_2}{N})] + 1 \right\}}. \quad (15)$$

Видно, что постоянная интегрирования  $C_3$  отвечает за фазу волны, а две другие  $C_{2,3}$  — за амплитуду и форму профиля. На рисунке показан

пример графиков частного решения системы (6)–(7), вычисленных по (15) и (8) и демонстрирующих решение в виде периодической волны. Видно, что волна имеет негармонический пилообразный профиль, более пологий в сторону роста  $\xi$  (особенно для приведенной температуры  $\Theta$ ). Аналогичный пилообразный профиль различных физических величин в ионизационной волне большой амплитуды часто наблюдается в экспериментах (например, для Ne в [9,10]).

Таким образом, в данной работе впервые получено точное решение уравнений, описывающих профиль ионизационной волны в плазме газового разряда.

## Список литературы

- [1] Недоспасов А.В. // УФН. 1968. Т. 94. В. 3. С. 439.
- [2] Пекарек Л. // УФН. 1968. Т. 94. В. 3. С. 463.
- [3] Куршев Г.А., Привалов В.Е., Фофанов Я.А. Страты в гелий-неоновых лазерах. Киев: Наук. думка, 1986.
- [4] Ланда П.С., Мискинова Н.А., Пономарев Ю.В. // УФН. 1980. Т. 132. В. 4. С. 601.
- [5] Горелик М.С., Цендин Л.Д. // ЖТФ. 1973. Т. 43. В. 4. С. 760.
- [6] Ohe K., Hashimoto M. // J. Appl. Phys. 1985. V. 58. N 8. P. 2975.
- [7] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.
- [8] Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров, ФГУП „РФЯЦ–ВНИИЭФ“, 2006.
- [9] Šiřha M., Drouet M.G. // Canadian J. Phys. 1968. V. 46. P. 2491.
- [10] Голубовский Ю.Б., Некучаев В.О. // ЖТФ. 1982. Т. 52. В. 5. С. 864.