

09

Учет конечной проводимости при расчете волноводов СВЧ и КВЧ диапазонов на основе релятивистского подхода

© В.В. Бирюков

Нижегородский государственный технический университет
E-mail: physics@nntu.nnov.ru

Поступило в Редакцию 22 мая 2007 г.

Приведен пример расчета направляющей структуры на основе релятивистского подхода. Рассмотрено влияние конечной проводимости поверхности экранированных направляющих структур на их электрические свойства. Проведено сравнение с результатами, полученными методом возмущений.

PACS: 41.20.-q

Для расчета характеристик волноводов СВЧ и КВЧ диапазонов необходимо знать структуру электромагнитного поля в этих устройствах. Обычно структура поля определяется в приближении идеально проводящей поверхности, ограничивающей устройство. Затем к этому полю применяется граничное условие Шукина–Леонтовича для реального проводника, обладающего конечной проводимостью [1]. Допускаемые при этом погрешности расчета считаются заведомо малыми и не оцениваются.

Сложность точного определения структуры электромагнитного поля при учете конечной проводимости реального проводника связана с тем, что граничное условие Шукина–Леонтовича носит в общем случае приближенный характер и является точным лишь в случае нормального падения волны на проводящую поверхность. Для того чтобы обойти эту трудность, можно решать задачу о нахождении структуры поля в движущейся системе отсчета, подобрав ее скорость так, чтобы граничное условие выполнялось точно. Полученные при этом компоненты электромагнитного поля с помощью преобразований Лоренца пересчитываются затем к исходной системе отсчета.

В качестве примера рассмотрим волновод, образованный двумя параллельными проводящими плоскостями $z' = 0$ и $z' = d$ (рис. 1) с

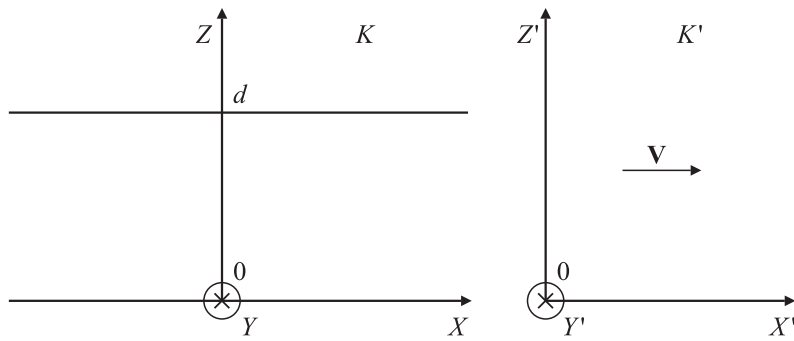


Рис. 1. Модель плоскопараллельного волновода.

удельной проводимостью σ . Полагаем, что проводящая среда занимает всю область пространства $z' < 0$ и $z' > d$. Здесь и далее буквы со штрихом обозначают величины в движущейся системе отсчета. В системе отсчета K' , движущейся со скоростью V вдоль оси x , параллельной проводящим поверхностям, рассмотрим нормальное падение плоской электромагнитной волны на проводящие поверхности. В этом случае электромагнитное поле между плоскостями представляет собой суперпозицию падающей и отраженной плоских волн. В движущейся системе отсчета граничное условие Шукина–Леонтовича выполняется точно, так как при этом строго сохраняется непрерывность тангенциальных составляющих векторов напряженности поля [2] и электромагнитное поле в проводнике носит характер плоской волны, уходящей в направлении нормали к границе. Расчеты показывают, что необходимая для этого скорость движения системы отсчета совпадает с групповой скоростью волны в данной направляющей структуре.

При переходе к неподвижной системе отсчета K компоненты поля и волнового вектора изменяются в соответствии с преобразованиями Лоренца: появляются продольные компоненты волнового вектора и одного из векторов напряженности поля (\mathbf{E} или \mathbf{H} в зависимости от того, какая из компонент E'_x или H'_x отлична от нуля).

В частном случае идеально проводящих поверхностей (тестовая задача) найденные величины полностью совпадают с величинами, получаемыми традиционными способами.

Таким образом, удается получить строгое решение в общем случае конечной проводимости проводника, что позволяет оценить величины ошибок в определении характеристик устройств, связанные с приближением идеального проводника.

Как показывают оценки, для применяющихся в технике СВЧ металлов ошибка в определении реальной части продольного волнового числа действительно пренебрежимо мала. В то же время ошибка в определении мнимой части продольного волнового числа весьма существенна, особенно вблизи критической частоты.

Рассмотрение удобно вести для векторов напряженности электрического и индукции магнитного полей, так как их ортогональность во взаимной среде сохраняется при переходе от одной системы отсчета к другой. Выберем скорость V так, чтобы векторы \mathbf{E}' и \mathbf{B}' были перпендикулярны оси z' и рассмотрим случай $E'_x = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \mathbf{y}'_0 (A_1 \mathbf{e}^{-jk'_z z'} + A_2 \mathbf{e}^{jk'_z z'}), \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{x}'_0 (A_3 \mathbf{e}^{-jk'_z z'} + A_4 \mathbf{e}^{jk'_z z'}).\end{aligned}\quad (1)$$

Амплитудные коэффициенты $A_1 \dots A_4$ — константы, определяемые из граничных условий, $\mathbf{x}^{0'}$, $\mathbf{y}^{0'}$ — единичные векторы соответствующих осей движущейся системы координат. Эти выражения должны удовлетворять уравнениям Максвелла и материальным уравнениям среды в движущейся системе отсчета [2]:

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}; \quad \mathbf{rot} \mathbf{H}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t};$$

$$\mathbf{D}' + \frac{1}{c^2} [\mathbf{vH}'] = \varepsilon \varepsilon_0 (\mathbf{E}' + [\mathbf{vB}']); \quad \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} [\mathbf{E}'\mathbf{v}] = \mu \mu_0 (\mathbf{H}' + [\mathbf{D}'\mathbf{v}]).$$

ε , μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды между параллельными плоскостями, ε_0 , μ_0 — электрическая и магнитная постоянные.

В результате подстановки (1) получаются следующие соотношения между коэффициентами $A_1 \dots A_4$:

$$\begin{aligned}A_1 k'_z &= -A_3 \omega'; & A_2 k'_z &= A_4 \omega'; \\ -\frac{k'_z}{\mu \mu_0} A_3 &= \omega' \frac{\varepsilon \varepsilon_0 (1 - \beta^2)}{1 - \varepsilon \mu \beta^2} \left(1 - \frac{\beta^2 (\varepsilon \mu - 1)^2}{\varepsilon \mu (1 - \beta^2)^2} \right) A_1;\end{aligned}$$

$$\frac{k'_z}{\mu\mu_0} A_4 = \omega' \frac{\varepsilon\varepsilon_0(1-\beta^2)}{1-\varepsilon\mu\beta^2} \left(1 - \frac{\beta^2(\varepsilon\mu-1)^2}{\varepsilon\mu(1-\beta^2)^2}\right) A_2.$$

Из этих выражений следует значение волнового числа, соответствующего нормальному падению плоской волны на границу раздела сред:

$$k'^2_z = \frac{\omega'^2}{c^2} \frac{\varepsilon\mu - \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Электромагнитное поле в проводящей среде (прошедшая волна) представляет собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси z' :

$$\mathbf{E}'_M = \mathbf{y}^{0'} A_5 \mathbf{e}^{-jk'_{mz} z'}, \quad z > d;$$

$$\mathbf{B}'_M = \mathbf{x}^{0'} A_6 \mathbf{e}^{-jk'_{mz} z'}, \quad z > d;$$

$$\mathbf{E}'_M = \mathbf{y}^{0'} A_7 \mathbf{e}^{jk'_{mz} z'}, \quad z < 0;$$

$$\mathbf{B}'_M = \mathbf{x}^{0'} A_8 \mathbf{e}^{jk'_{mz} z'}, \quad z < 0.$$

Потребовав, аналогично предыдущему, чтобы эти выражения удовлетворяли уравнениям Максвелла и материальным уравнениям среды, получим:

$$A_5 k'_{mz} = -A_6 \omega'; \quad A_7 k'_{mz} = A_8 \omega';$$

$$-j \frac{k'_{mz}}{\mu_m \mu_0} A_6 = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}} + j\omega' \frac{1}{1-\varepsilon_m \mu_m \beta^2} \right) \times \left(\varepsilon_0 \varepsilon_m (1-\beta^2) - \frac{\beta^2(\varepsilon_m \mu_m - 1)^2}{c^2 \mu_0 \mu_m (1-\beta^2)} \right) A_5;$$

$$j \frac{k'_{mz}}{\mu_m \mu_0} A_8 = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}} + j\omega' \frac{1}{1-\varepsilon_m \mu_m \beta^2} \right) \times \left(\varepsilon_0 \varepsilon_m (1-\beta^2) - \frac{\beta^2(\varepsilon_m \mu_m - 1)^2}{c^2 \mu_0 \mu_m (1-\beta^2)} \right) A_7,$$

где ε_m, μ_m — диэлектрическая и магнитная проницаемости проводящей среды.

Отсюда следует выражение для волнового числа в проводящей среде:

$$k'_{mz} = \sqrt{\mu_0 \mu_m \omega'} \sqrt{\frac{\omega' \varepsilon_0 (\varepsilon_m \mu_m - \beta^2)}{\mu_m (1 - \beta^2)}} - j \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

При выбранном направлении скорости движущейся системы отсчета напряженности электрического и магнитного полей непрерывны на границе раздела двух сред [2]. Приравнивая соответствующие компоненты поля, получим:

$$A_1 e^{-jk'_z d} + A_2 e^{jk'_z d} = \frac{\mu}{\mu_m} A_5 e^{-jk'_z d};$$

$$A_3 e^{-jk'_z d} + A_4 e^{jk'_z d} = \frac{\mu}{\mu_m} A_6 e^{-jk'_z d};$$

$$A_1 + A_2 = \frac{\mu}{\mu_m} A_7; \quad A_3 + A_4 = \frac{\mu}{\mu_m} A_8.$$

В сочетании с полученными ранее соотношениями имеем систему 8 линейных однородных алгебраических уравнений относительно 8 неизвестных коэффициентов A_i . Условие нетривиальности решения данной системы дает дисперсионное уравнение волн рассматриваемой структуры:

$$e^{2jk'_z d} = \left(\frac{k'_z - k'_{mz}}{k'_z + k'_{mz}} \right)^2.$$

Так как граничные условия выполняются точно, решив систему уравнений относительно A_i в точке корня дисперсионного уравнения, можно получить строгие выражения для компонент поля между плоскостями и для поперечного волнового числа в системе отсчета K' .

При переходе к неподвижной системе отсчета K компоненты поля и волнового вектора изменяются в соответствии с преобразованиями Лоренца: появляются продольные компоненты волнового вектора и вектора индукции магнитного поля:

$$E_x = 0; \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad E_z = 0; \quad B_x = B'_x; \quad B_y = 0; \quad B_z = \frac{\frac{\beta}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\varepsilon \mu}}; \quad k_x = \beta \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}; \quad k_y = 0; \quad k_z = k'_z.$$

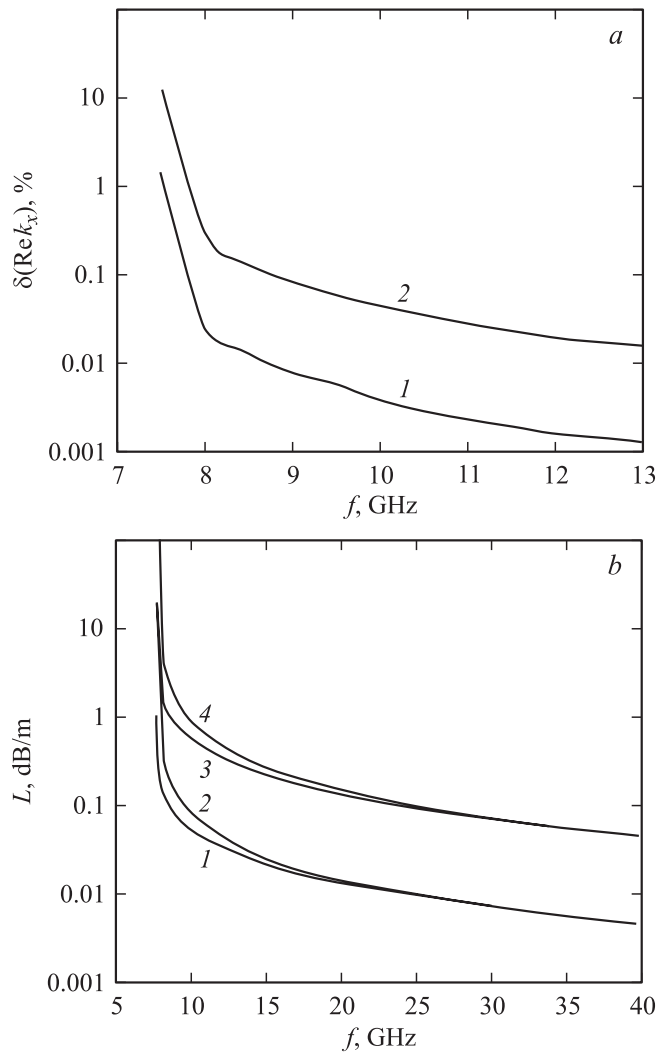


Рис. 2. *a* — относительная погрешность в определении действительной части продольного волнового числа в приближении идеально проводящей поверхности. 1 — $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$ S/m; 2 — $\sigma = 5.7 \cdot 10^5$ S/m. $\epsilon = 1, \mu = 1$. *b* — зависимость погонных потерь от частоты при различных удельных проводимостях поверхностей. 1, 3 — предлагаемый метод расчета; 2, 4 — метод возмущений; 1, 2 — $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$ S/m; 3, 4 — $\sigma = 5.7 \cdot 10^5$ S/m. $\epsilon = 1, \mu = 1$.

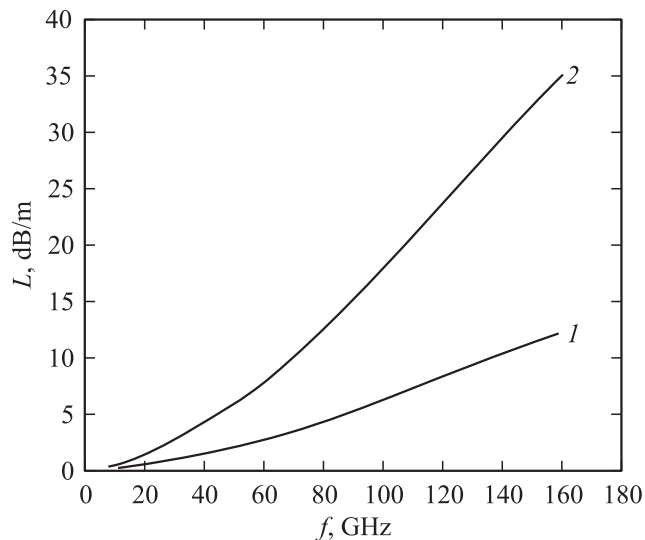


Рис. 3. Зависимость погонных потерь от частоты при фиксированной (7%) относительной отстройке от критической частоты. 1 — предлагаемый метод расчета; 2 — метод возмущений. $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$ S/m; $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$.

В пределе, при бесконечной проводимости поверхностей (тестовая задача), найденные величины полностью совпадают с величинами, получаемыми традиционными способами.

Полученное при конечной проводимости проводника решение позволяет найти величину ошибки в определении волновых чисел, связанную с приближением идеального проводника. Как показывают оценки, для применяющихся в технике СВЧ металлов на частотах, не слишком близких к критической, эта ошибка действительно пренебрежимо мала. На рис. 2, а приведены зависимости величины относительной ошибки в определении действительной части продольного волнового числа от частоты при различных удельных проводимостях металла. Как видно из графиков, для меди (кривая 1) эта ошибка достигает заметной величины лишь вблизи критической частоты. Уже при удалении от критической частоты на 5% она не превышает сотых долей процента. С уменьшением удельной проводимости ошибка в определении действительной части продольного волнового числа становится существенной во все большей части частотного диапазона.

На рис. 2, *b* показаны зависимости погонных потерь от частоты при различных удельных проводимостях металла. Как видно из графиков, метод возмущений дает заметную ошибку даже при достаточно высокой проводимости металла. Кроме того, эта ошибка растет при увеличении диэлектрической или магнитной проницаемостей среды. Следует отметить, что расчет по предлагаемой методике дает одинаковое увеличение погонных потерь при одинаковом увеличении диэлектрической или магнитной проницаемостей. Это объясняется увеличением числа длин волн на единицу длины направляющей структуры. Приближенный расчет методом возмущений дает рост потерь при увеличении диэлектрической проницаемости и неизменность — при увеличении магнитной проницаемости среды, что трудно объяснить физически.

На рис. 3 показана зависимость погонных потерь от частоты при фиксированной (7%) относительной отстройке от критической частоты. Из графика видно, что ошибка, даваемая методом возмущений, растет с ростом частоты.

Список литературы

- [1] *Неганов В.А., Осипов А.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 2005. 648 с.
- [2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.