*01;05;08*

# Самомодуляция акустической волны в твердом теле с дислокациями

© *В.И. Ерофеев*

Нижегородский филиал Института машиноведения
им. А.А. Благонравова РАН, Нижний Новгород
E-mail: erf04@sinn.ru

*Поступило в Редакцию 20 июня 2007 г.*

Рассматривается распространение ультразвуковых квазигармонических волн в нелинейной твердой среде с дислокациями. Показано, что наличие дислокаций приводит к модуляционной неустойчивости квазигармоник и формированию стационарных волн огибающих (волновых пакетов), при этом их амплитуда и ширина определяются эффективной массой дислокаций и коэффициентом акустодислокационного взаимодействия.

PACS: 61.72.Lk, 43.25.Dc

Для описания распространения ультразвука в твердом теле, с учетом наличия в нем дислокаций, в [1] предложена следующая система уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_i = \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik}, \quad A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi_i + B \frac{\partial}{\partial t} \xi_i = f_i. \tag{1}$$

Здесь $U$ — акустическое смещение, $\xi$ — дислокационное смещение, $A$ — масса дислокации, $B$ — сила трения на единицу длины дислокации, $P_{ik}$ — тензор напряжений, $\rho$ — плотность материала, $f$ — сила, действующая на дислокацию.

Записывая свободную энергию $F$ в виде функции переменных деформаций $U_{ij}$ и дислокационного смещения $\xi_i$ в виде

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{ijkl} U_{ij} U_{kl} + \frac{1}{2} c_{ik} \xi_i \xi_k + \frac{1}{2} \beta'_{ijkl} (b_i \xi_j + b_j \xi_i) U_{kl} \tag{2}$$

(где $\lambda_{ijkl}$ — модули упругости, $c_{ik}$ — модули „жесткости“ дислокации, $\beta'_{ijkl}$ — тензор акустодислокационного взаимодействия, $b_j$ — вектор

Бюргерса) и используя равенства

$$P_{ik} = \frac{\partial}{\partial U_{ik}} F, \quad f_i = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} F, \tag{3}$$

можно с учетом выражения для свободной энергии $F$ вычислить правые части в уравнениях (1).

Рассматривая далее плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси $x$ в материале, однородном вдоль осей $y$ и $z$, получим следующие уравнения движения ($\xi_i = \xi$, $U_k = U$, $i, k = 1$):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U = \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \xi; \quad A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi + B \frac{\partial}{\partial t} \xi = -\beta \frac{\partial}{\partial x} U, \tag{4}$$

где $c$ — скорость, с которой распространялась бы волна, если бы в материале не было дислокаций, а $\beta = \beta'_{ijkl} b_j$ — коэффициент акусто-дислокационного взаимодействия.

В рамках линейных уравнений (4) в [2,3] проанализировано влияние плотности дислокаций на дисперсию фазовой скорости волны, величину и характер затухания. Произведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными по изучению характеристик распространения упругих волн в образцах с изменяющейся плотностью дислокаций (деформируемых и циклически нагружаемых образцах).

Начиная с некоторого порогового значения амплитуды ультразвука и плотности дислокаций в материале, амплитуда колебаний дислокации достигает величины, соизмеримой с расстоянием между дислокационными линиями. При этом будет происходить активное взаимодействие дислокаций, которое приводит к необходимости учета нелинейности дислокационной подсистемы, т.е. массу дислокации следует рассматривать как сумму постоянной и пульсационной составляющих. При том пульсационную составляющую будем считать пропорциональной квадрату дислокационного смещения $\xi$ [1]:

$$A = A_0(1 + A_1 \xi^2). \tag{5}$$

Считая дислокационную подсистему консервативной, с учетом выражения (5), распространение вдоль оси $x$ плоской волны продольной деформации $U(x, t)$ в материале, обладающем дислокационной нелинейностью, будет описываться следующим уравнением:

$$\frac{A_0}{\beta}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\xi-\frac{c^2A_0}{\beta}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial t^2}\xi-\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi$$
$$+\frac{A_0A_1}{\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\xi^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi\right)=0. \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) отыскивается в виде одной гармоники с медленно меняющейся в пространстве и времени комплексной амплитудой $\xi_0$:

$$\xi(x,t)=\xi_0(\varepsilon x,\varepsilon t)e^{i(\omega t-kx)}+k.c. \qquad (7)$$

Используя метод усреднения по „быстрым“ переменным [4], от (6) перейдем к укороченному уравнению огибающих квазигармонической волны. В системе координат, движущейся с групповой скоростью $\left(v_{gr}=\frac{\partial\omega}{\partial\kappa}\right)$: $\eta=x-v_{gr}t$, $\tau=\varepsilon t$, эволюция огибающей будет описываться нелинейным уравнением Шредингера

$$\iota\frac{\partial\xi_0}{\partial\tau}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\kappa^2}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial\eta^2}-\alpha|\xi_0|^2\xi_0=0, \qquad (8)$$

где $\alpha=\frac{3A_1\omega(\omega^2-c^2k^2)}{2(2\omega^2-c^2k^2)}$.

Известно [4,5], что квазигармоническая волна может оказаться неустойчивой по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты — так называемая модуляционная неустойчивость или самомодуляция.

С помощью критерия Лайтхилла $\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\alpha<0$ определяется условие наличия модуляционной неустойчивости, что в рамках рассматриваемой задачи эквивалентно следующему неравенству $\frac{\beta^2}{\rho A_0}<c^2\omega^2$ для систем с положительной нелинейностью $(A_1>0)$.

На спектральном языке эффект самомодуляции характеризуется усилением боковых компонент в спектре модулированной волны. В эти компоненты будет перекачиваться энергия из центральной части спектра возмущения.

Для систем с отрицательной нелинейностью $(A_1<0)$ модуляционная неустойчивость отсутствует.

Введя в рассмотрение вместо комплексной амплитуды $\xi_0$ действительные амплитуду $(a)$ и фазу $(g)$ — $\xi_0=ae^{ig}$ и анализируя уравнение (8), определим, как будут выглядеть волновые пакеты, на которые разбивается квазигармоническая волна в результате модуляционной неустойчивости.

Амплитуда огибающей волнового пакета описывается эллиптическим косинусом Якоби:

$$a(\xi) = a_0 \mathrm{cn}(k_0\xi, s). \tag{9}$$

Здесь $a_0$ — амплитуда волны, $k_0$ — нелинейный аналог волнового числа, $s$ — модуль эллиптической функции, $\xi = \eta - V\tau$, $V = \mathrm{const}$.

Форма волны огибающей (9) определяется квадратом модуля эллиптической функции, который, в свою очередь, зависит от величины амплитуды $s^2 = \frac{m_2 a_0^2}{2(m_1 + m_2 a_0^2)}$ (где $m_1 = \frac{V^2}{4(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2})^2}$, $m_2 = -\frac{\alpha}{(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2})^2}$) и, следовательно, характеризует степень нелинейных искажений волнового пакета.

При малых амплитудах квадрат модуля стремится к 0 и форма огибающей близка к синусоиде. При больших амплитудах квадрат модуля стремится к 0.5 и форма огибающей становится пилообразной.

Определим, как связаны высота $(h)$ и ширина $(\Delta)$ волнового пакета, сформировавшегося в результате самомодуляции квазигармонической волны, с основными характеристиками дислокационной структуры — эффективной массой дислокации $(A_0)$ и коэффициентом акустодислокационного взаимодействия $\beta$. Отождествляя высоту волнового пакета с удвоенной амплитудой $h = 2a_0$, а его ширину с половиной длины волны огибающей $\Delta = \frac{\Lambda}{2}$, получим следующие соотношения:

$$h \approx \frac{2V}{\omega\sqrt{3A_1 c}}\left(1 - \frac{3}{4}\,\frac{\beta^2}{\rho A_0 c^2 \omega^2}\right); \quad \Delta \approx \frac{2\pi c^3 \omega^3 \rho A_0}{V\beta^2}. \tag{10}$$

Таким образом, ширина волнового пакета $\Delta$, увеличивающаяся пропорционально средней массе дислокации, уменьшается пропорционально $\frac{1}{\beta^2}$. Высота волнового пакета $h$ пропорциональна $(1 - \beta^2)$, а также $\left(1 - \frac{1}{A_0}\right)$.

Рассмотрим предельные значения коэффициента акустодислокационного взаимодействия $\beta$. Если взаимодействие между дислокационным и акустическим полями слабо, т.е. $\beta \to 0$, то $\Delta \to \propto$, а $h \to \mathrm{const}$, т.е. волновой пакет превращается в квазигармоническую волну. К аналогичному результату приводит и устремление к бесконечности эффективной массы дислокации $(A_0 \to 0)$.

Самомодуляция акустических волн наблюдалась экспериментально в [6]. Данная экспериментальная работа выполнялась авторами на кольцевом алюминиевом резонаторе, в котором нелинейные процессы носят накапливающийся характер. В зазор свернутого в кольцо стержня были вклеены пьезокерамические излучатели ультразвука. Приемником служили миниатюрные пьезоэлементы, наклеенные на боковую поверхность резонатора. На излучатель подавалось гармоническое напряжение с частотой, близкой к одной из собственных частот резонатора, на продольных волнах с частотой в диапазоне 50–200 kHz. При превышении накачкой некоторого порогового значения в резонаторе возбуждалось модулированное акустическое поле.

Весьма затруднительно дать теоретическое объяснение самомодуляции, пользуясь уравнениями акустики твердого тела, учитывающей квадратичную нелинейность продольной волны деформации и пренебрегающей (в силу малости) ее кубической нелинейностью [7].

Авторы работы [6] предполагают, что самомодуляция акустической волны, возбуждаемой на частоте $\omega_0$, возникает в результате двухступенчатого процесса. Сначала, считают они, идет параметрическая генерация на двух низких частотах $\omega_1$ и $\omega_2$ (где $\omega_1 \ll \omega_2$), так что $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ и, тем самым, модулированная волна со спектральными компонентами $\omega_2, \omega_0, \omega_3$ и низкочастотный сигнал с частотой $\omega_1$.

Выше было показано, что учет кубической дислокационной нелинейности позволяет говорить о самомодуляции акустической волны, происходящей по „классическому“ сценарию.

Если задача является неконсервативной, то, очевидно, параметры волнового пакета (10) будут эволюционировать во времени.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-02-17158 и 06-08-00520).

## Список литературы

[1] *Бурлак Г.Н., Островский И.В.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 18. С. 69–74.
[2] *Ерофеев В.И., Ромашов В.П.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 6. С. 6–11.
[3] *Ерофеев В.И., Ромашов В.П.* // Дефектоскопия. 2004. № 1. С. 59–64.
[4] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 454 с.
[5] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
[6] *Соустова И.А., Сутин А.М.* // Акуст. журнал. 1975. Т. 21. № 5. С. 953–954.
[7] *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* // УФН. 1970. Т. 102. № 4. С. 549–586.