01;03

Термоэлектрическая конвекция в переменном тепловом поле

© *А.В. Беляев, Б.Л. Смородин*

Пермский государственный университет
E-mail: bsmorodin@yandex.ru

Поступило в Редакцию 10 мая 2007 г.

Исследована конвективная неустойчивость горизонтального слоя жидкого полупроводника или ионного расплава под влиянием переменного градиента температуры в условиях невесомости. Рассмотрен случай, когда избыточный заряд возникает только в результате термодиффузии. Найдены границы термоэлектрической конвективной неустойчивости. Обнаружено, что при переменном воздействии, имеющем нулевое среднее значение, возмущения субгармонического отклика отсутствуют; показано, что в зависимости от амлитуды и частоты модуляции, а также физических свойств полупроводника или расплава синхронные возмущения проявляют себя по-разному и принадлежат разным классам. Определены характеристики амплитуды и частоты внешнего воздействия, необходимые для эффективного подавления термоэлектрической конвекции.

PACS: 44.25.+f, 83.80.Gv

Неоднородный нагрев жидкости может приводить к неустойчивости ее механического равновесия, быть причиной конвекции [1]. Среди множества механизмов неустойчивости выделяются электрические, действующие даже в условиях микрогравитации [2]. Эти механизмы необходимо учитывать при производстве высокочистых полупроводников в условиях орбитальных станций: подавление конвекции блокирует перенос вредных примесей. Конвекция в расплавах, обусловленная термодиффузионным распределением заряда и появлением термоэдс, исследована в [3–6]. Перспективным способом параметрического управления термоэлектрической конвекцией жидкого полупроводника является использование переменного градиента температуры [7].

В настоящей работе исследовано влияние переменного теплового поля на термоэлектрическую конвекцию в горизонтальном слое жидкого полупроводника или ионного расплава, найдены пороги неустойчивости, изучены различные типы синхронного отклика электроконвективной системы на внешнее воздействие.

Рассмотрим случай гармонической модуляции равновесного вертикального градиента температуры на фоне постоянного значения в условиях невесомости, когда рэлеевский механизм неустойчивости не работает, а неустойчивость вызвана появлением термоэдс. Будем считать, что толщина слоя h много меньше толщины температурного скин-слоя $\delta = (\chi/\omega_0)^{1/2}$ (ω_0 — частота модуляции, χ — температуропроводность жидкости). Толщина слоя, в свою очередь, много больше дебаевского радиуса. В таком случае можно пренебречь пространственной неоднородностью градиента температуры

$$\begin{aligned} \nabla T_0 &= -A(\eta_1 + \eta_2 \cos\omega_0 t)\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (0, 0, 1), \\ \mathbf{E} &= \alpha \nabla T_0 = -\alpha A(\eta_1 + \eta_2 \cos\omega_0 t)\mathbf{e}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь A — средний градиент температуры, η_1 — постоянная составляющая и η_2 — амплитуда переменной компоненты градиента температуры, α — термоэлектрический параметр, характеризующий степень термодиффузии зарядов.

Используя в качестве масштаба длины — h, скорости — χ/h, времени — h^2/ν, температуры — Ah, давления — $\rho_l \chi\nu/n^2$, плотности заряда — $\varepsilon\alpha A/h$ и напряженности электрического поля αA, запишем уравнения, характеризующие эволюцию малых возмущений механического равновесия в невесомости

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v} - B\rho(\eta_1 + \eta_2\cos\omega t)\mathbf{e}, \\ &\Pr\frac{\partial T}{\partial t} - v_z(\eta_1 + \eta_2\cos\omega t) = \Delta T; \quad v_z = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}, \\ &P_1\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho + \Delta T; \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathbf{v}$, p, T, ρ — возмущения скорости, давления, температуры и плотности заряда соответственно; $\Pr = \frac{\nu}{\chi}$ — тепловое и $P_1 = \frac{\varepsilon\nu}{\sigma h^2}$ — электрическое число Прандтля; $B = \frac{\varepsilon\alpha^2 A^2 h^2}{\rho_l \chi\nu}$ — термоэлектрический параметр конвекции; $\Omega = \frac{\omega_0 h^2}{\nu}$ — безразмерная частота модуляции (ρ_l, ν, ε, σ — плотность жидкости, коэффициенты кинематической вязкости, диэлектрической проницаемости, электропроводности).

Рассмотрим нормальные возмущения $\{T, \mathbf{v}, \rho, p\} = a_i(t)\sin(\pi z) \times \times \exp(ik_x x + ik_y y)$, где $a_i(t)$ — амплитуды, зависящие от времени, k_x, k_y — волновые числа, характеризующие периодичность возмущений в плоскости слоя. Такой вид возмущений удовлетворяет идеальным граничным условиям, соответствующим слою со свободными границами:

$$z = 0, 1 : v_z = 0; \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0; \qquad T = 0; \qquad \rho = 0. \tag{3}$$

Для случая $P_1 \approx 0$ (что реализуется для жидких полупроводников с высоким значением параметра термоэдс [7]) систему (2) после перенормировки времени $t \to \gamma t/(k^2 + \pi^2)$, а также амплитуд температуры $a_1 \to x_1/a$ и скорости $a_2 \to (k^2 + \pi^2)\gamma x_2$ запишем в более удобном симметризованном виде

$$\frac{dx_1}{dt} = a(\eta_1 + \eta_2 \cos\omega t)x_2 - (1 - /\gamma)x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a(\eta_1 + \eta_2 \cos\omega t)x_1 - \gamma x_2, \tag{4}$$

$$\gamma = \sqrt{\mathrm{Pr}}, \quad a^2 = \frac{Bk^2}{(k^2 + \pi^2)^2}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \omega = \frac{\gamma\Omega}{(k^2 + \pi^2)}.$$

Численное интегрирование системы (4) методом Рунге–Кутта совместно с использованием метода Флоке [8] позволяет получить границы областей неустойчивости на плоскости параметров амплитуда — обратная частота модуляции $(a,\ 1/\omega)$, а также исследовать характер поведения нейтральных возмущений.

На рис. 1 изображена временна́я эволюция амплитуд x_1, x_2 на границе неустойчивости в переменном поле с нулевым средним значением $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$. В отличие от уравнения Матье [8], у системы (4) отсутствуют решения субгармонического отклика, а синхронные решения можно разделить на классы H1 (рис. 1, *a*) и H2 (рис. 1, *b*) в соответствии с их поведением при временном сдвиге на минимальный интервал — половину периода $T/2$ параметрического воздействия (изменения градиента температуры):

$$\mathrm{H1:} \qquad x_1(t + T/2) = x_1(t), x_2(t + T/2) = -x_2(t), \tag{5}$$

$$\mathrm{H2:} \qquad x_1(t + T/2) = -x_1(t), x_2(t + T/2) = x_2(t). \tag{6}$$

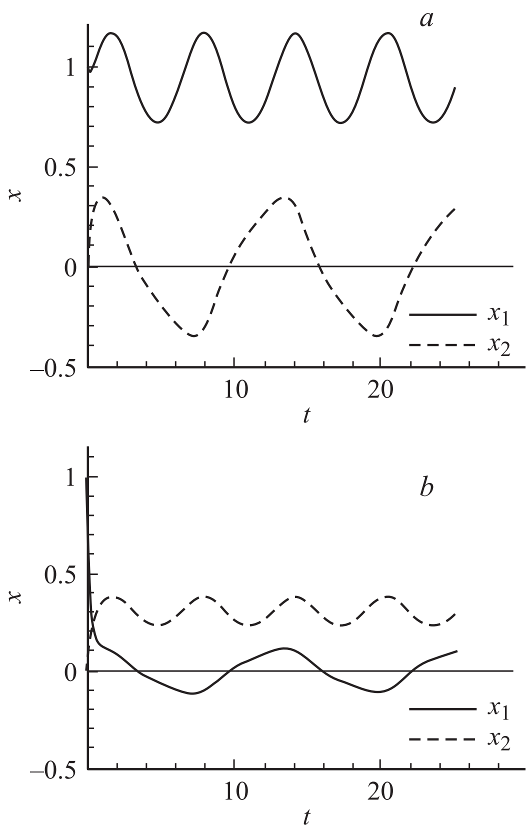

Рис. 1. Временнáя эволюция амплитуд x_1, x_2 на границе неустойчивости в переменном поле: $\omega = 0.5$, $a = 1.445$; a — $\gamma = 4.083$, b — $\gamma = 0.2449$.

Поведение разных классов нейтральных синхронных возмущений исследовано в [9] для диэлектрофоретической электроконвекции, в [10] для электроконвекции нематических жидких кристаллов.

На рис. 2 отражено поведение порога конвекции в зависимости от обратной частоты при изменении параметра $\gamma = \sqrt{\mathrm{Pr}} < 1$, соответствующего ионным расплавам или жидким полупроводникам [4,11] (для арсенида галлия $\mathrm{Pr} = 0.06$ [12] и $\gamma = 0.2449$). Области неустойчивости находятся над кривыми. При увеличении γ область неустойчивости

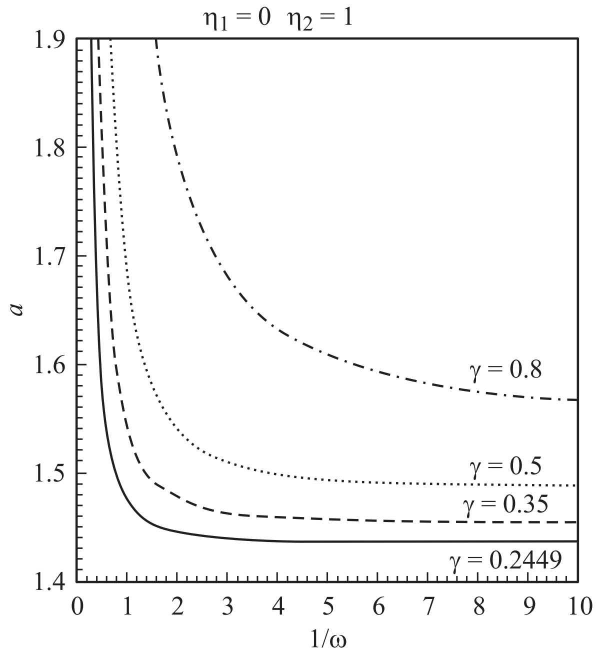

Рис. 2. Зависимости порогов термоэлектрической конвекции от обратной частоты при изменении параметра $\gamma < 1$.

уменьшается, сдвигаясь в область больших амплитуд и меньших частот. При этом отклик системы на внешнее воздействие всегда относится к классу H2.

Границы областей неустойчивости в случае $\gamma > 1$ автоматически получаются из рис. 2. Анализ поведения системы (4) после замены $\gamma \to 1/\gamma$, $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$ показывает, что уравнения (4) и положения границ неустойчивости остаются прежними. Но трансляционные свойства амплитуд нейтральных возмущений x_1 и x_2 станут соответствовать классу H1 (6). Таким образом, зависимость порогов конвекции от числа Прандтля немонотонна. Максимальная устойчивость жидкости достигается при $\mathrm{Pr} = 1$.

В присутствии постоянной составляющей $(\eta_1 \neq 0)$ разделение синхронных решений на классы H1 и H2 невозможно, что доказывается с помощью исследования свойств системы (4), записанной в матричном виде

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t), \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1/\gamma & a(\eta_1 + \eta_2 \cos \omega t) \\ a(\eta_1 + \eta_2 \cos \omega t) & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Например, решение, приналежащее классу H1 (5), удовлетворяет соотношению

$$X\left(t + \frac{T}{2}\right) = DX(t), \tag{8}$$

где

$$D = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выразим отсюда $x(t) = D^{-1}X(t + \frac{T}{2}) = DX(t + \frac{T}{2})$ и подставим в дифференциальное уравнение (7)

$$\frac{d}{dt}X\left(t + \frac{T}{2}\right) = D^{-1}A(t)DX\left(t + \frac{T}{2}\right). \tag{9}$$

С другой стороны, произведя в (7) замену $t \to t + \frac{T}{2}$, получим тот же результат в другой форме

$$\frac{d}{dt}X\left(t + \frac{T}{2}\right) = A\left(t + \frac{T}{2}\right)X\left(t + \frac{T}{2}\right). \tag{10}$$

Сравнение (9) и (10) накладывает жесткое ограничение на свойства матрицы A

$$A\left(t + \frac{T}{2}\right) = D^{-1}A(t)D. \tag{11}$$

Используя явный вид $A(t)$ и матрицы D, из (11) получим матричное равенство

$$\begin{pmatrix} -1/\gamma & a(\eta_1 - \eta_2 \cos \omega t) \\ a(\eta_1 - \eta_2 \cos \omega t) & -\gamma \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1/\gamma & -a(\eta_1 + \eta_2 \cos \omega t) \\ -a(\eta_1 + \eta_2 \cos \omega t) & -\gamma \end{pmatrix}, \tag{12}$$

которое возможно только в случае $-a(\eta_1 + \eta_2 \cos \omega t) = a(\eta_1 - \eta_2 \cos \omega t)$. Откуда немедленно следует: либо $a = 0$ (это противоречит представлению о переменном характере воздействия), либо $\eta_1 = 0$. Для класса H2 можно провести аналогичное рассмотрение.

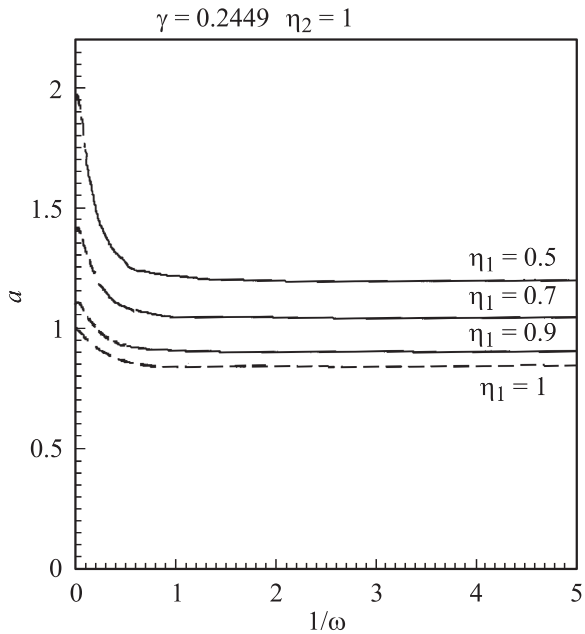

Рис. 3. Границы зон неустойчивости для колебаний синхронного отклика при различных $\eta_1 \neq 0$, $\gamma = 0.2449$ (арсенид галлия). Сплошные линии соответствуют решениям, ответвляющимся от класса H2. Пунктирные линии — граница неотрицательных нейтральных колебаний.

Границы зон неустойчивости, полученные для арсенида галлия $\gamma = 0.2449$ численно, при различных значениях $\eta_1 \neq 0$ показаны на рис. 3. Области неустойчивости находятся выше кривых. Нейтральные возмущения в этом случае принадлежат классическому типу синхронного отклика, наблюдающемуся в уравнении Матье [8], и соответствуют трансляционной симметрии с минимальным периодом T:

$$x_1(t+T) = x_1(t), \qquad x_2(t+T) = x_2(t) \tag{13}$$

(для сравнения: в решениях класса H2 период изменения амплитуды скорости x_2 вдвое меньше периода модуляции градиента температуры). Сплошной линией на рисунке обозначена граница откликов, в которых x_2 всегда положительно, а x_1 принимает отрицательные значения во второй половине периода (это решения, которые ответвляются от отклика класса H2 в случае ненулевого среднего значения градиента температуры). Пунктирная линия — порог неустойчивости, соответствующий нейтральным колебаниям, характеризующимся всюду неотрицательными значениями x_1 и x_2. При увеличении η_1 граница между типами решений сдвигается в сторону меньших частот. При $\eta_1 = 1$ решения x_1 и x_2 неотрицательны при любых частотах. Анализ карт устойчивости (рис. 2, 3) показывает, что для эффективного подавления термоэлектрической конвекции необходимо использовать большие частоты модуляции, имеющей нулевое $\eta_1 = 0$ или среднее значение $\eta_1 \leqslant 0.5$.

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00789, 07-01-96046) и гранта CRDF (PE-009-0).

Список литературы

[1] *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
[2] *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Физматгиз, 1972.
[3] *Иоффе Н.В., Калинин Н.В., Эйдельман Е.Д.* // Письма в ЖТФ. 1976. Т. 2. В. 9. С. 395–396.
[4] *Саранин В.А.* // Магнитная гидродинамика. 1983. № 1. С. 85–89.
[5] *Эйдельман Е.Д.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. В. 5. С. 1633–1644.
[6] *Smorodin B.L., Gershuni G.Z., Velarde M.G.* // International Journal of Heat Mass Transfer. 1999. V. 42. P. 3159–3168.
[7] *Смородин Б.Л.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 3. С. 1–5.
[8] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
[9] *Smorodin B.L., Velarde M.G.* // J. Electrost. 2001. V. 50. P. 205–226.
[10] *Stannarius R., Heuer J., John Th.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. P. 066218.
[11] *Катлер Н.* Жидкие полупроводники. М., 1980.
[12] *Lan C.W., Ting C.C.* // Journal of crystal growth. 1995. V. 149. P. 175–186.