03

Асимптотический анализ эффектов поступательной неравновесности в гиперзвуковом течении около плоской поверхности с острой передней кромкой

© М.М. Кузнецов, И.И. Липатов, В.С. Никольский

МГОГУ, Москва
E-mail: kuznets-omn@yandex.ru
Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского (ЦАГИ), Жуковский Моск. обл.

В окончательной редакции 13 августа 2007 г.

Исследована область применимости модели механики сплошной среды, основанной на уравнениях Навье–Стокса, для гиперзвукового обтекания пластины с острой передней кромкой потоком вязкого газа. Асимптотический анализ гиперзвукового течения разреженного газа проведен на основе кинетического уравнения для газов с внутренними степенями свободы. Исследованы особенность и немонотонность в распределении некоторых макроскопических функций вблизи острой передней кромки плоской пластины. Полученные результаты сравнивались с результатами прямого численного моделирования на основе метода Монте-Карло.

PACS: 47.85.-g

Рассматривается гиперзвуковое течение разреженного газа около передней кромки заостренной плоской пластины, расположенной под нулевым углом атаки.

Модель течения изображена на рис. 1. В области, отмеченной цифрой *1* на рис. 1, газ сильно разрежен, причем ее протяженность $x \sim L$ соизмерима со средней длиной свободного пробега молекул в набегающем потоке $L \sim \lambda$.

В области *2* толщина невязкого ударного слоя δ_{SL} сравнима с толщиной гиперзвукового пограничного слоя δ_{BL}, т. е. $\delta_{SL} \sim \delta_{BL}$.

Наконец, в области *3* при $\delta_{BL} \gg \delta_{SL}$ справедлива континуальная теория пограничного слоя с вязким взаимодействием [1].

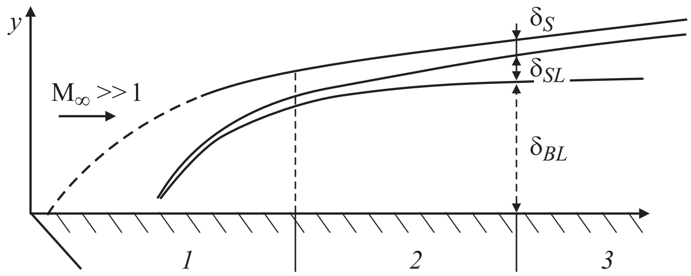

Рис. 1. Гиперзвуковое течение разреженного газа около плоской пластины с острой передней кромкой. δ_S — толщина ударной волны.

Введем масштабы функций и координат, характерных для тонкого ударного слоя:

$$y = \frac{y^0}{\delta_{BL}}, \quad x = \frac{x^0}{L}, \quad u = \frac{u^0}{V_\infty}, \quad v = \frac{v^0}{v_{BL}}, \quad L \sim \lambda_\infty$$

$$\rho = \frac{\rho^0}{\rho_{BL}}, \quad p = \frac{p^0}{p_{BL}}, \quad |\mathbf{C}_k| = \frac{|\mathbf{C}_k^0|}{v_{TB}}, \quad v_{TB} = \sqrt{\varepsilon}\,V_\infty$$

$$v_{BL} = V_\infty \overline{\delta_{BL}}, \;\; \overline{\delta_{BL}} = \left(\frac{\delta_{BL}}{L}\right) = N\varepsilon, \;\; \rho_{BL} = \rho_S(\overline{\delta_{BL}})^2, \;\; p_{BL} = \rho_\infty V_\infty^2 (\overline{\delta_{BL}})^2.$$

Здесь размерные величины отмечены индексом 0, величины в пограничном слое отмечены индексом BL, ε — ньютоновский параметр подобия, $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, где γ — отношение удельных теплоемкостей c_p/c_v, параметры в набегающем потоке — индексом „∞“; x, y — координаты соответственнно вдоль и перпендикулярно к пластине, u, v — проекции среднемассовой скорости V на x и y; ρ, p — соответственно среднемассовая плотность газа и давление, C — собственная скорость молекулы.

После обезразмеривания уравнения Больцмана $Df = J(f, f_1)$ оно будет содержать параметр $\underline{N}$. Здесь

$$Df = -\underline{N} C_y \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial C_x} - \underline{N}\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial f}{\partial C_x} - C_y \frac{\partial f}{\partial y}\right) + o(\underline{N}\varepsilon), \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial r_k}, \quad f = f(\mathbf{C}_1, E_{ji}, \mathbf{r}, t), \quad J = \frac{M^t - f}{\tau_{el}} + \frac{M^{eq} - f}{\tau_{in}},$$

где f — функция распределения молекул по скоростям и энергетическим состояниям, E_{ji} — внутренняя энергия j-го состояния i-й степени свободы, τ_{el} и τ_{in} — времена упругих и неупругих столкновений соответственно, M^t и M^{eq} — максвеллианы с неодинаковыми $(T_t \neq T_i)$ и одинаковыми $(T_t = T_i = T^{eq})$ температурами поступательных (T_t) и внутренних (T_i) степеней свободы соответственно, J — интеграл столкновений,

$$M^t = n\left(\frac{m}{2\pi kT_t}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{mC^2}{2kT_t}\right)\prod_{i=1}^{I}\frac{\exp(-E_{ji}/kT_i)}{\sum\limits_s \exp(-E_{si}/kT_i)},$$

здесь m — молекулярный вес, n — концентрация, I — число степеней свободы молекулы.

Нетрудно видеть, что параметр $\underline{N}$, введенный Никольским В.С. в работе [2], определяет величину отношения конвективного члена к столкновительному члену в уравнении Больцмана, т. е.

$$\underline{N} \equiv \frac{\frac{df}{dt}}{J} \sim \frac{\lambda_{BL}}{\delta_{BL}\sqrt{\varepsilon}}. \tag{2}$$

С другой стороны, оценка в уравнениях Навье–Стокса толщины пограничного слоя на длине вдоль пластины x дает

$$\frac{\delta_{BL}}{x} \sim \underline{N}\,\varepsilon = \frac{\sqrt{\chi\varepsilon}}{M_\infty} = \sqrt{\overline{V}\varepsilon}, \tag{3}$$

где χ — параметр сильного взаимодействия, $\overline{V}$ — параметр разреженности [1].

Из формулы (3) непосредственно видно, что кинетический параметр $\underline{N}$ связан с континуальными параметрами вязкого взаимодействия $\overline{\chi}$, $\overline{V}$.

Заметим, что из формул (2) и (3) следует, что

$$\underline{N} \sim \frac{\delta_{BL}}{\varepsilon x} \sim \frac{\delta_{BL}}{\delta_{SL}}. \tag{4}$$

Здесь δ_{SL} — толщина ударного слоя на длине вдоль пластины x, $\delta_{SL} \sim \varepsilon x$.

Таким образом, при $\underline{N} \sim 1$, когда левая и правая части уравнения Больцмана совпадают по порядку величины $(df/dt \sim J)$, совпадают также и толщины пограничного и ударного слоев $(\delta_{BL} \sim \delta_{SL})$. На рис. 1 этому состоянию потока соответствует область *2*. Можно также сказать, что обычно рассматриваемые континуальными режимы тонкого вязкого ударного слоя, когда $\delta_{BL} \sim \delta_{SL}$, с точки зрения ньютоновской асимптотической теории ($\varepsilon \to 0$, $\underline{N} \sim 1$) являются кинетическими.

От уравнения Больцмана (1) можно традиционным образом перейти к эквивалентной бесконечной системе уравнений кинетических моментов [3].

Удалось установить, как и в работе [3], что система уравнений для кинетических моментов может быть асимптотически оборвана при $\varepsilon \to 0$, $\underline{N} \sim 1$. Следует отметить, что конечные выражения для компонентов тензора напряжений и компонентов вектора теплового потока получаются из системы моментов третьего порядка. Эти выражения замыкают уравнения сохранения массы, импульса и энергии. Они нелинейно зависят от величины градиента скорости, нормального к поверхности, и могут быть преобразованы к обычному виду с коэффициентами диссипации, которые зависят от квадрата величины нормального градиента скорости. Эти замыкающие соотношения имеют вид

$$P_{yy} = P^{eq}(1 - \xi\Omega^2)^{-1} = P^t\left(1 + \frac{2}{3}\,\Omega^2\right)^{-1},$$

$$P_{xy} = -\mu_{eff}\,\frac{\partial u}{\partial y}, \quad q_y = -\lambda_{eff}\,\frac{\partial T^{eq}}{\partial y}, \tag{5}$$

$$\mu_{eff} = \mu_{N-S}\Big/\left(1 + \frac{2}{3}\,\Omega^2\right), \quad \lambda_{eff} = \lambda_{N-S}\Big/\left(1 + \frac{2}{3}\,\Omega^2\right),$$

$$\frac{T' - T^{eq}}{T^t} = \frac{2}{3}\,\frac{C_V^{in}}{C_V}\,\frac{\frac{1+\alpha}{\alpha}\,\Omega^2}{1 + \frac{2}{3}\,\Omega^2}, \quad \frac{P^{eq}}{P^t} = \frac{T^{eq}}{T^t},$$

$$\mu_{N-S} = \underline{N}P^t\tau/1+\alpha, \;\; \lambda_{N-S} = \frac{C_p}{m}\,NP^t\tau/1+\alpha, \;\; \xi = \frac{2}{3}\left(\frac{C_V^{in}}{C_V}\,\frac{1+\alpha}{\alpha} - 1\right),$$

$$\Omega = \frac{\underline{N}\tau}{1+\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{3}{2}\,kT^t + \sum_i C_V^{(i)}T_i = C_V T^{eq}, \quad C_V = \frac{3}{2}\,k + C_V^{in},$$

где C_V^{in}/C_V — отношение удельных теплоемкостей внутренних C_V^{in} и суммы поступательных и внутренних степеней свободы C_V, $C_P = C_V + R$, R — универсальная газовая постоянная, α — отношение времен неупругих ε_{in} и упругих τ столкновений, k — константа Больцмана, μ_{N-S} и λ_{N-S} — диссипативные коэффициенты в уравнениях

Навье–Стокса, индекс „eq“ выделяет равновесное состояние газа, t — подсистему из поступательных степеней свободы газа, T_t, T_i, T_{eq} — температуры соответственно поступательных и колебательных степеней свободы и равновесная температура.

Из этих выражений, как и ранее в работе [4], следует вывод о том, что величины коэффициентов диссипации в неравновесном многоатомном газе меньше, чем соответствующие величины для одноатомного газа.

Аналогичные выражения справедливы для диссипативных коэффициентов в феноменологической теории турбулентности.

Ш.К. Ченг вывел соотношения, подобные (5), для одноатомного газа (при $\alpha \to 0$) из уравнений Грэда для 13 моментов [5].

Важно отметить, что система уравнений в виде законов сохранения массы, импульса и энергии для движения разреженного газа с реологическими соотношениями (5) имеет параболический тип и всегда может быть решена на основе стандартных методов.

В качестве внешних граничных условий использовались модифицированные условия Рэнкина–Гюгонио (включая условия скольжения на скачке), которые, как отмечено в работе Ченга [5], не зависят от модели течения внутри ударной волны. Им же установлено, что условия скольжения на стенке имеют порядок $\underline{N}\sqrt{\varepsilon T_w/T_0}$ (T_w — температура стенки), т.е. что они асимптотически малы при любых величинах T_w/T_0. На гиперзвуковых режимах течения их величина тем более мала, поскольку $T_w/T_0 \ll 1$.

На рис. 2 представлены распределения компонента тензора напряжений P_{yy} вдоль пластины, вычисленные на основе нелинейной теории переноса. Следует отметить, в численных расчетах функции P_{yy} использовалось приближение касательного клина. Безразмерное расстояние ξ_1, параметр B и температурный фактор g_w, представленные на рис. 2, имеют вид

$$\xi_1 = \frac{3}{2}\underline{N}^{-2}\int\limits_0^x P_{yy}dx, \quad B = \frac{3\mathrm{M}_\infty^4}{2\varepsilon^2 \mathrm{Re}_{BL}^2}, \quad g_w = \frac{T_w}{T_0},$$

где Y_w и T_0 — температура стенки и температура торможения соответственно, Re и M_∞ — характерные значения числа Рейнольдса в пограничном слое и число Маха в набегающем потоке.

Это распределение не имеет особенности вблизи передней кромки. В то же время термодинамическое давление P, вычисленное в

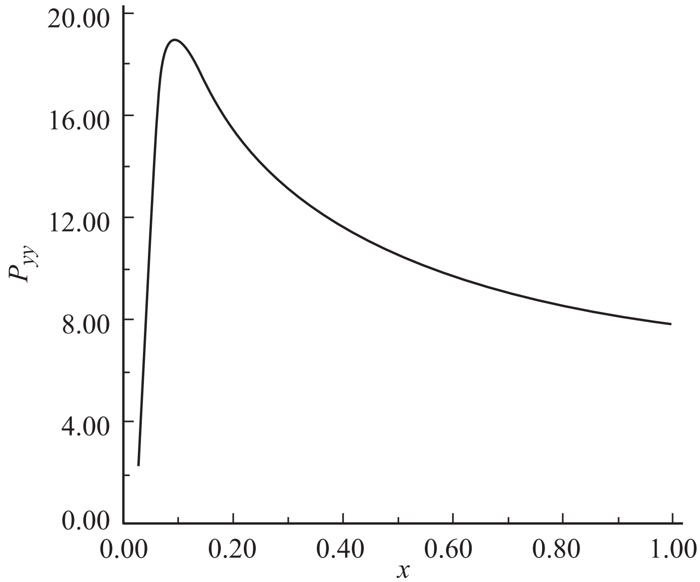

Рис. 2. Распределение P_{yy} вдоль плоской пластины, вычисленное на основе теории нелинейного переноса. $B = 1$, $g_w = 1$.

рамках теории сильного взаимодействия, содержит особенность вблизи передней кромки заостренной пластины. Можно отметить, что распределение P_{yy} характеризуется наличием максимума, расположенного на расстоянии нескольких длин свободного пробега от передней кромки, а ниже по течению монотонно уменьшается. Можно показать, что функция δ_{BL} меняется как $x^{3/2}$ передней кромки пластины, а функции P_{yy} и $d\delta_{BL}/dx$ стремятся к нулю при $x \to 0$. Следует отметить, что в теории нелинейного переноса в отличие от теории сильного взаимодействия не учитываются эффекты скольжения и скачка температуры. Следовательно, отсутствие особенности в распределении P_{yy} около передней кромки можно объяснить только за счет нелинейной зависимости тензора напряжений и теплового потока от нормального к поверхности градиента скорости.

На рис. 3 представлены распределения функций $\overline{P}_n$ ($\overline{P}_n = P_{yy}/P_{fm}$) вдоль поверхности пластины, вычисленные на основе кинетической вер-

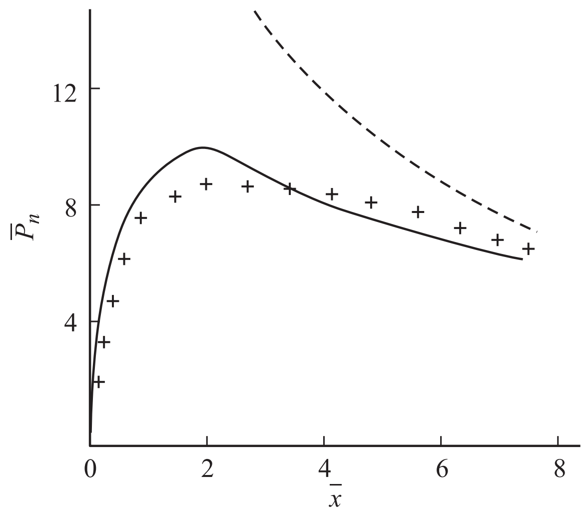

Рис. 3. Сравнение распределений P_n вдоль плоской пластины с острой передней кромкой на основе кинетической версии параболизованных уравнений Навье–Стокса и прямого численного моделирования на основе Монте-Карло. Сплошная линия — теория нелинейного переноса, пунктирная линия — теория сильного взаимодействия, крестики — прямое численное моделирование.

сии параболизованных уравнений Навье–Стокса (т. е. соответствующих уравнений сохранения с величинами P_{yy}, P_{xy}, $q_y, \ldots,$ определенных по формулам (5)) и на основе прямого численного моделирования [6] для числа Маха набегающего потока $\mathrm{M} = 23$. Безразмерное расстояние вдоль пластины $x = x^0/\lambda_b$, где масштаб длины λ_{fb} и давление в свободномолекулярном потоке P_{fm} определены в работе [6]. Можно видеть, что результаты расчетов на основе кинетической версии параболизованных уравнений Навье–Стокса лучше согласуются с результатами прямого численного моделирования, чем результаты расчетов по теории сильного взаимодействия.

Авторы признательны О.Г. Фридлендеру за внимательное прочтение работы и конструктивные замечания.

Исследование частично поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (грант 05-01-08043-офи-п).

Список литературы

[1] *Bush W.B.* // Proc. 4th Symp. RGD. New York: New Academic Press, 1967. P. 939.
[2] *Никольский В.С.* // Тр. Гагаринских чтений. М.: Наука, 1986. С. 197.
[3] *Кузнецов М.М., Никольский В.С.* // Учен. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 3. С. 38.
[4] *Ерофеев А.И., Перепухов В.А.* // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 1. С. 102.
[5] *Cheng H.K., Emanuel G.* // AIAAI. 1995. V. 33. N 3. P. 385.
[6] *Pullin D.I., Harvey J.K.* // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. P. 689.