01

Об энергии и импульсе электромагнитного поля

© *И.П. Краснов*

ФГУП „Центральный научно-исследовательский институт имени академика А.Н. Крылова“, Санкт-Петербург
E-mail: i3349@yandex.ru

Поступило в Редакцию 28 июня 2008 г.

Обращается внимание на некорректность общепринятого представления энергии электромагнитного поля в случае наличия в пространстве намагничивающихся или поляризующихся тел, и обосновывается вариант представления энергии, свободный от отмечаемых недостатков. Исходя из предлагаемого представления энергии получается иное толкование теоремы Пойнтинга и иное представление импульса электромагнитного поля. На этом пути оказывается возможным извлечь из уравнений Максвелла больше информации об электромагнитных силах, чем это обычно делается, и данное обстоятельство служит, по мнению автора, дополнительным подтверждением правильности приводимых рассуждений и выкладок.

PACS: 41.20.-q

1. В большинстве монографий по электродинамике [1–6], в документах системы единиц СИ [7], а также в учебной литературе (например, [8]) плотность энергии электромагнитного поля в точках евклидова пространства Σ_3 определяется в единицах СИ выражением

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{H}, \mathbf{B}) + \frac{1}{2}(\mathbf{E}, \mathbf{D}). \tag{1}$$

В статике интеграл от w по всему пространству конечен и определяет полную энергию системы намагниченных и поляризованных тел:

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_3}(\mathbf{H}, \mathbf{B})\,dV + \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_3}(\mathbf{E}, \mathbf{D})\,dV. \tag{2}$$

Однако использование формулы (2) в случае наличия в пространстве произвольного постоянно намагниченного или поляризованного тела приводит в статике к нулевому результату: $W = 0$. Этот факт для намагниченного тела установлен Дж. К. Максвеллом ([9], т. 2, с. 222) исходя из представления напряженности магнитного поля в виде

$$\mathbf{H} = -\mathrm{grad}\,\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left(\mathbf{J},\ \mathrm{grad}'\frac{1}{r_{xx'}}\right) dV' \tag{3}$$

и справедливости тождества Максвелла ([9], т. 2, с. 46), определяющего индукцию магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{J} = \mathrm{rot}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \left[\mathbf{J},\ \mathrm{grad}'\frac{1}{r_{xx'}}\right] dV'. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{J}$ — намагниченность тела V. Равенство $W = 0$ для намагниченного тела отмечается также в [3] (с. 193) без ссылки на Максвелла. Распространение этих результатов на случай произвольно поляризованного тела следует из наличия в теории поляризации диэлектриков формул, аналогичных (3) и (4) (см., например, [5]). В силу отмеченных обстоятельств формула (1) не пригодна для описания энергии намагничивающихся и поляризующихся тел в статике и, следовательно, принятое определение плотности энергии электромагнитного поля не может быть признано корректным.

2. Некорректность определения плотности энергии электромагнитного поля формулой (1) сказывается также при интерпретации теоремы Пойнтинга. Теорема Пойнтинга утверждает, что если удовлетворены уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B},\\ &\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0,\\ &\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{J}, \end{aligned} \tag{5}$$

то формула

$$\left(\mathbf{H},\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right) + \left(\mathbf{E},\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\right) = -\mathrm{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] - (\mathbf{j}, \mathbf{E}) \tag{6}$$

справедлива во всем пространстве Σ_3 в любой момент времени.

Большинство авторов работ по электродинамике рассматривают левую часть формулы Пойнтинга (6) как производную по времени от плотности энергии электромагнитного поля w

$$\frac{\partial}{\partial t} w = \left(\mathbf{H}, \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right) + \left(\mathbf{E}, \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\right), \tag{7}$$

хотя и отмечают, что выражение (7) может иметь место только при наличии пропорциональности между индукциями и напряженностями электромагнитного поля в каждой точке пространства:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}. \tag{8}$$

С другой стороны, формула (6) в соответствии с ее выводом из уравнений Максвелла, справедлива при любой физически допустимой зависимости между индукциями и напряженностями, и именно по этому поводу Дж. Стрэттон ([2], с. 125) замечает: „В качестве общего интеграла уравнений поля теорема Пойнтинга обоснована безупречно. Ее физическая интерпретация, однако, может быть подвергнута некоторой критике“.

Таким образом, использование определения плотности энергии электромагнитного поля формулой (1) приводит к неоправданному сужению области применимости теоремы Пойнтинга, в которую не попадают электромагнитные процессы с участием ферромагнетиков и сегнетоэлектриков, при этом молчаливо предполагается, что при намагничении магнетиков и поляризации диэлектриков работа не совершается.

3. Все отмеченные выше противоречия, связанные с определением плотности энергии электромагнитного поля, снимаются, если вместо формулы (1) принять формулу

$$w_0 = \frac{\mu_0}{2} H^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} E^2, \tag{9}$$

а в статике характеризовать полную энергию выражением

$$W_0 = \frac{\mu_0}{2} \int\limits_{\Sigma_3} H^2 dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{\Sigma_3} E^2 dV, \tag{10}$$

магнитная составляющая в котором определена Максвеллом ([9], т. 2, с. 222), а электрическая написана в соответствии с отмеченной Мосотти полной аналогией процессов поляризации процессам намагничения вещества (см. [9], т. 1, с. 83). Формула (9) использовалась для характеристики плотности энергии электромагнитного поля при отсутствии магнетиков и диэлектриков в [10] и не приводит к ограничению общности формулы Пойнтинга при любой зависимости между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$. Преобразуя формулу (6), с учетом последних двух формул системы уравнений Максвелла (5), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0}{2}H^2+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon_0}{2}E^2=-\mathrm{div}\,[\mathbf{E},\mathbf{H}]-(\mathbf{j},\mathbf{E})-\mu_0\left(\mathbf{H},\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}\right)-\left(\mathbf{E},\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\right). \tag{11}$$

Два последних слагаемых справа в (11), согласно [11] и [12], определяют работу, совершаемую электромагнитным полем в единице объема по изменению намагниченности и соответственно поляризации вещества в единицу времени. Определение плотности энергии электромагнитного поля формулой (9) снимает противоречия, связанные с нулевым значением полной энергии в статике, поскольку, согласно (10), $W_0=0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{H}\equiv 0$ и $\mathbf{E}\equiv 0$, а также сохраняет свойства формулы Пойнтинга как общего интеграла уравнений Максвелла и позволяет в явном виде выделить в ней работу, затрачиваемую на намагничение и поляризацию вещества. Предлагаемая трактовка энергии электромагнитного поля подтверждается успешным применением принципа минимума полной свободной энергии при решении практических задач в работах [11–13]. Принцип исходит из представления приращения плотности свободной энергии F в процессах намагничения и поляризации в виде

$$dF_m=(\mathbf{H},d\mathbf{B})=d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2\right)+\mu_0(\mathbf{H},d\mathbf{J}),$$

$$dF_e=(\mathbf{E},d\mathbf{D})=d\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right)+(\mathbf{E},d\mathbf{P}), \tag{12}$$

принятом в работах [4–6] для изотермических процессов, происходящих без изменения плотности веществ. Из формул (12) следует, что формула (2), при наличии соотношений (8), характеризует полную энергию, которая затрачивается при намагничении или поляризации тел, т.е. сумму энергии электромагнитного поля и энергии намагничения или поляризации этих тел.

4. Используя для представления плотности энергии электромагнитного поля формулу (9), можно получить уравнение, определяющее

характер изменения плотности импульса электромагнитного поля $\mathbf{G}$ исходя из его общепринятого определения в виде:

$$\mathbf{G} = \mu_0 \varepsilon_0 [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \tag{13}$$

Выполнив необходимые преобразования уравнений Максвелла (5), используя схему, принятую в [5], будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{G} + \rho\,\mathbf{E} + \mu_0[\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{P} + \mu_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}, \mathbf{H}\right] - \mu_0\mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{J} - \mu_0\varepsilon_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}, \mathbf{E}\right]$$

$$= \sum_{\alpha,\gamma=1}^{3} \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\big(\mu_0 H_\alpha H_\gamma + \varepsilon_0 E_\alpha E_\gamma\big) - \operatorname{grad} w_0. \tag{14}$$

Отличительной особенностью полученного уравнения от уравнений для плотности импульса, данных в [1–5], является наличие в нем в явном виде плотности всех электромагнитных сил — кулоновских сил:

$$\rho\,\mathbf{E}, \qquad -\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{P}, \qquad -\mu_0\,\mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{J},$$

и силы Лоренца и ее аналогов для поляризационных и магнитных токов:

$$\mu_0\,[\mathbf{j}, \mathbf{H}], \qquad \mu_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}, \mathbf{H}\right], \qquad \mu_0\varepsilon_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}, \mathbf{E}\right].$$

Кроме того, выражение, стоящее в правой части (14), есть дивергенция максвелловского тензора напряжений пространства:

$$T_{\alpha\gamma} = \mu_0 H_\alpha H_\gamma + \varepsilon_0 E_\alpha E_\gamma - \delta_{\alpha\gamma} w_0, \tag{15}$$

который имеет тот же вид, что и в [10], но в отличие от его представления в работах [1–5] он сохраняет свой вид в случае, когда точка пространства, в которой рассматривается (15), находится в вакууме и когда она находится внутри магнетика или диэлектрика.

5. Следует отметить, что в ряде работ зарубежных авторов, например, [14–16], на основе термодинамического рассмотрения и сопоставления „кулоновского“ и „амперовского“ подходов к описанию силовых проявлений магнетизма приходят к определению плотности энергии магнитного поля в виде

$$w_m^* = \frac{1}{2\mu_0} B^2, \tag{16}$$

вытекающему из „амперовского“ подхода, и к определению аналога плотности энергии магнитного поля, вытекающему из „кулоновского“ подхода, названного плотностью ко-энергии:

$$w_m^0 = \frac{\mu_0}{2} H^2. \tag{17}$$

Исходя из такого определения как энергии, так и ко-энергии магнитного поля, в обоих случаях можно получать решения магнитостатических задач исходя из принципа минимума полной свободной энергии, однако в динамике использование в качестве плотности магнитной энергии величины w_m^* приводит к появлению физически плохо интерпретируемых членов в формуле Пойнтинга, и только плотность ко-энергии w_m^0 приводит к физически разумному результату.

6. Анализ истории вопроса показывает, что использование формул (1) и (2) связано с недоразумением. Эти формулы введены в широкое обращение А. Зоммерфельдом ([1], с. 50), который ссылается на Дж.К. Максвелла. Однако Максвелл, как это указывалось выше, отмечал некорректность формулы (2) в ее магнитной части и рассматривал эту часть формулы (2) как гипотетическую, полагая, что дальнейшее развитие представлений Ампера о молекулярных токах, как основе магнетизма, позволит построить более точную теорию магнитных явлений, чем теория С. Пуассона и В. Томсона, в которой уже не будет обращения в нуль энергии поля ([9], т. 2, с. 225). Считая формулу (1) гипотетической, Максвелл не включил ее в число основных уравнений электродинамики, хотя включил формулу (4), из которой следует (9). В настоящее время многими авторами, например [5,15], показано, что теория Ампера эквивалентна теории Пуассона и Томсона, в частности, в [15] предложены иные формулы для представления энергии электромагнитного поля.

Список литературы

[1] *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: ИЛ, 1958. 502 с.
[2] *Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.;Л.: ОГИЗ, 1948. 539 с.
[3] *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 703 с.
[4] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 2004. 616 с.
[5] *Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А.* Электродинамика. М.: Наука, 1978. 352 с.
[6] *Вонсовский С.В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971. 1032 с.

[7] *Власов А.Д., Мурин Б.П.* Единицы физических величин в науке и технике. М.: Энергоиздат, 1990. 223 с.
[8] *Иродов И.Е.* Электромагнетизм. М.: БИНОМ, 2006. 320 с.
[9] *Максвелл Дж.К.* Трактат об электричестве и магнетизме. М.: Наука, 1989. Т. 1. 416 с.; Т. 2. 437 с.
[10] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория поля. М.: ГИФМЛ, 1962. 423 с.
[11] *Тозони О.В., Майергойз И.Д.* Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Техника, 1979. 352 с.
[12] *Краснов И.П.* Основы классической теории намагничения тел. СПб.: ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2008. 251 с.
[13] *Краснов И.П.* Расчетные методы судового магнитезма и электротехники. Л.: Судостроение, 1986. 216 с.
[14] *De Medeiros L.H., Reyne G., Meunier G.* // IEEE trans. Mag. 1999. V. 35. N 3. P. 1215–1218.
[15] *Bobbio S.* Electrodynamics of materials: forces, stresses and energies in solid and fluids. San Diego, CA, Academic Press, 2000. 357 p.
[16] *Henrotte F., Hameyer K.* // Journ. of Comput. and Appl. Math. 2004. V. 168. P. 235–243.