01;07

Устойчивый метод расчета слоистых диэлектрических и металлодиэлектрических структур с круглым поперечным сечением

© А.Г. Рожнев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: RozhnevAG@gmail.com

В окончательной редакции 22 сентября 2008 г.

Предложен новый метод расчета собственных и вытекающих мод слоистых диэлектрических и металлодиэлектрических волноведущих структур с азимутальной симметрией, обобщающий подход, развитый в работе [1] для анализа плоскослоистых структур. Методика демонстрирует численную устойчивость при расчете систем, в которых происходит туннелирование или затухание (неустойчивость) волн в радиальном направлении. Возможности метода демонстрируются на примерах расчета брэгговских оптических волокон различного типа.

PACS: 42.81.Et, 84.40.Az, 42.70.Qs

Круглые слоистые диэлектрические и металлодиэлектрические структуры применяются в электродинамике в широком диапазоне длин волн, от сантиметрового до субмиллиметрового [2–5]. В оптике значительный интерес проявляется в последнее время к брэгговским волокнам (БВ) [6–8], обладающим рядом уникальных свойств. Для расчета таких систем обычно используется метод матрицы передачи (ММП), отличающийся простотой и высокой точностью [2,6,9]. К сожалению, ММП оказывается численно неустойчивым, если в некоторых слоях поперечное волновое число является комплексным, что соответствует туннелированию волн через слой в радиальном направлении, сильным потерям в слое или неустойчивости. В таком случае матрица передачи может стать почти вырожденной, что приводит к накоплению численных ошибок. Известные алгоритмы подавления неустойчивости [10,11] приводят либо к существенному усложнению методики, либо неприме-

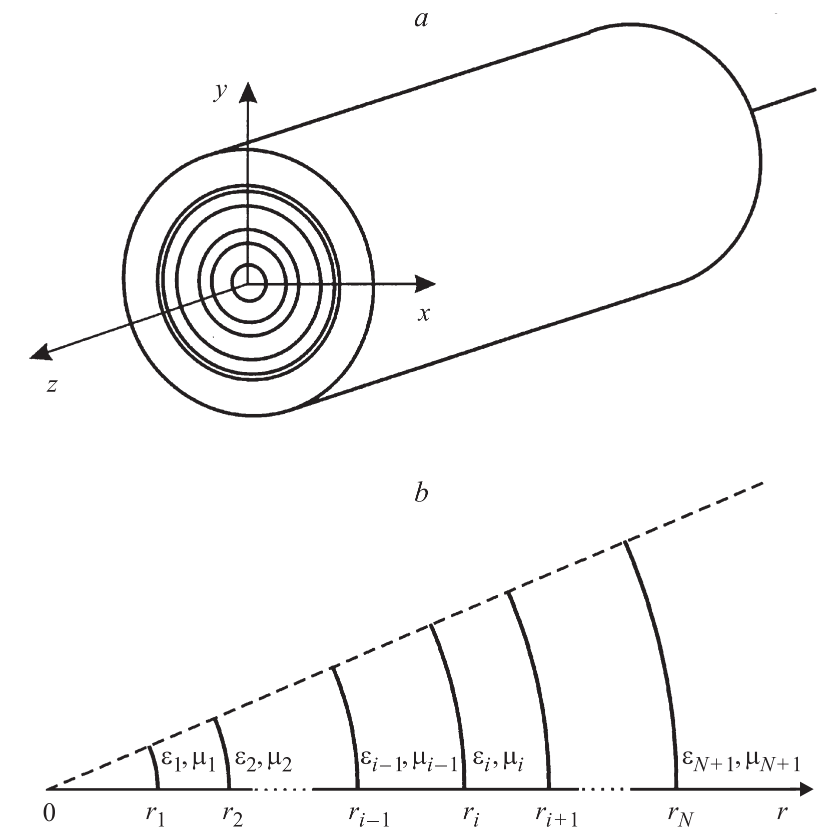

Рис. 1. Геометрия круглого слоистого диэлектрического волновода: *a* — общий вид; *b* — принятые обозначения для геометрических и материальных параметров структуры.

нимы к анализу азимутально-симметричных структур из-за гибридного, в общем случае, характера собственных волн.

В работе [1] был предложен альтернативный подход к анализу планарных слоистых структур, который лишен указанных недостатков. В настоящем сообщении эта методика обобщается на случай слоистых волноводов с круглым поперечным сечением.

Для определенности рассматриваем открытую систему, в которой имеется $N+1$ слой и N границ между слоями, причем $r_{N+1} = \infty$ (рис. 1). Решение для компонент поля ищем в виде $E_{r,z} = E_{r,z}(r)\sin(m\varphi + \varphi_0)$, $E_\varphi = E_\varphi(r)\cos(m\varphi + \varphi_0)$, $H_{r,z} = Z_0^{-1} \times$ $\times F_{r,z}(r)\cos(m\varphi + \varphi_0)$, $H_\varphi = Z_0^{-1} F_\varphi(r)\sin(m\varphi + \varphi_0)$. Здесь принята зависимость всех величин от времени и продольной координаты в форме $\exp[j(\omega t - \beta z)]$, β — продольное волновое число, m — азимутальный индекс, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные, угол φ_0 определяет поляризацию моды. Азимутальные компоненты полей в каждом слое выражаются через продольные:

$$E_\varphi(r) = \frac{jk}{\kappa_i^2}\left(\frac{-mn_{ef}F_z(r)}{r} + \mu_i \frac{\partial E_z(r)}{\partial r}\right),$$

$$F_\varphi(r) = \frac{-jk}{\kappa_i^2}\left(\frac{-mn_{ef}E_z(r)}{r} + \varepsilon_i \frac{\partial F_z(r)}{\partial r}\right), \tag{1}$$

где ε_i, μ_i — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости i-го слоя, $\kappa_i = \sqrt{\beta^2 - \varepsilon_i\mu_i k^2}$ — поперечное волновое число в слое, $k = \omega/c$, $n_{ef} = \beta/k$ — эффективный показатель преломления. Рассмотрим границу между слоями с номерами i и $i+1$, причем пока будем считать, что $i \neq 1, N$. В i-м слое z-компоненты полей представим в виде

$$E_z(r) = \frac{e_{i-1}W(\kappa_i r, \kappa_i r_i) - e_i W(\kappa_i r, \kappa_i r_{i-1})}{W(\kappa_i r_{i-1}, \kappa_i r_i)},$$

$$F_z(r) = \frac{f_{i-1}W(\kappa_i r, \kappa_i r_i) - f_i W(\kappa_i r, \kappa_i r_{i-1})}{W(\kappa_i r_{i-1}, \kappa_i r_i)}. \tag{2}$$

Здесь $W(x, y) = J_m(x)Y_m(y) - J_m(y)Y_m(x)$, $J_m(x)$ и $Y_m(x)$ — функции Бесселя и Неймана, e_i, f_i — значения продольных компонент электрического и магнитного полей на i-й границе. Подставим эти соотношения в (1), вычислим азимутальные компоненты магнитного и электрического полей в i-м и $i+1$-м слоях, приравняем их на границе между слоями и после небольших преобразований получим два линейных однородных уравнения, связывающих величины e_{i-1}, f_{i-1}, e_i, f_i, e_{i+1}, f_{i+1}:

$$\frac{2\varepsilon_i}{\pi r_i \kappa_i^2 W(\kappa_i r_i, \kappa_i r_{i-1})} e_{i-1} + \left(\frac{\varepsilon_i W'(\kappa_i r_{i-1}, \kappa_i r_i)}{\kappa_i W(\kappa_i r_i, \kappa_i r_{i-1})} \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon_{i+1} W'(\kappa_{i+1} r_{i+1}, \kappa_{i+1} r_i)}{\kappa_{i+1} W(\kappa_{i+1} r_{i+1}, \kappa_{i+1} r_i)} \right) e_i + \frac{m n_{ef}}{r_i} \left(\frac{1}{\kappa_{i+1}^2} - \frac{1}{\kappa_i^2} \right) f_i$$
$$+ \frac{2\varepsilon_{i+1}}{\pi r_i \kappa_{i+1}^2 W(\kappa_{i+1} r_{i+1}, \kappa_{i+1} r_i)} e_{i+1} = 0,$$

$$\frac{2\mu_i}{\pi r_i \kappa_i^2 W(\kappa_i r_i, \kappa_i r_{i-1})} f_{i-1} + \frac{m n_{ef}}{r_i} \left(\frac{1}{\kappa_{i+1}^2} - \frac{1}{\kappa_i^2} \right) e_i$$
$$+ \left(\frac{\mu_i W'(\kappa_i r_{i-1}, \kappa_i r_i)}{\kappa_i W(\kappa_i r_i, \kappa_i r_{i-1})} + \frac{\mu_{i+1} W'(\kappa_{i+1} r_{i+1}, \kappa_{i+1} r_i)}{\kappa_{i+1} W(\kappa_{i+1} r_{i+1}, \kappa_{i+1} r_i)} \right) f_i$$
$$+ \frac{2\mu_{i+1}}{\pi r_i \kappa_{i+1}^2 W(\kappa_{i+1} r_{i+1}, \kappa_{i+1} r_i)} f_{i+1} = 0. \qquad (3)$$

Штрих означает производную по первому аргументу функции $W(x, y)$.

Первая и последняя границы требуют отдельного рассмотрения. В первом слое вместо выражений (2) следует использовать формулы $E_z(r) = e_1 J_m(\kappa_1 r)/J_m(\kappa_1 r_1)$ и $F_z(r) = f_1 J_m(\kappa_1 r)/J_m(\kappa_1 r_1)$. При этом вместо формул (3) для первой границы получаем

$$\left(\frac{\varepsilon_1 J_m'(\kappa_1 r_1)}{\kappa_1 J_m(\kappa_1 r_1)} + \frac{\varepsilon_2 W'(\kappa_2 r_2, \kappa_2 r_1)}{\kappa_2 W(\kappa_2 r_2, \kappa_2 r_1)} \right) e_i + \frac{m n_{ef}}{r_1} \left(\frac{1}{\kappa_2^2} - \frac{1}{\kappa_1^2} \right) f_1$$
$$+ \frac{2\varepsilon_2}{\pi r_1 \kappa_2^2 W(\kappa_2 r_2, \kappa_2 r_1)} e_2 = 0,$$

$$\frac{m n_{ef}}{r_1} \left(\frac{1}{\kappa_2^2} - \frac{1}{\kappa_1^2} \right) e_1 + \left(\frac{\mu_1 J_m'(\kappa_1 r_1)}{\kappa_1 J_m(\kappa_1 r_1)} + \frac{\mu_2 W'(\kappa_2 r_2, \kappa_2 r_1)}{\kappa_2 W(\kappa_2 r_2, \kappa_2 r_1)} \right) f_1$$
$$+ \frac{2\mu_2}{\pi r_1 \kappa_2^2 W(\kappa_2 r_2, \kappa_2 r_1)} f_2 = 0. \qquad (4)$$

В оболочке волновода в случае открытой структуры $E_z(r)$, $F_z(r) \sim$ $\sim H_m^{(2)}(\kappa_{N+1} r)$, $H_m^{(2)}(x)$ — функция Ганкеля второго рода, поэтому для внешней границы подобная процедура приводит к соотношениям

$$\frac{2\varepsilon_N}{\pi r_N \kappa_N^2 W(\kappa_N r_N, \kappa_N r_{N-1})} e_{N-1} + \left(\frac{\varepsilon_N W'(\kappa_N r_{N-1}, \kappa_N r_N)}{\kappa_N W(\kappa_N r_N, \kappa_N r_{N-1})} \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_{N+1} H_m^{(2)'}(\kappa_{N+1} r_N)}{\kappa_{N+1} H_m^{(2)}(\kappa_{N+1} r_N)} \right) e_N + \frac{m n_{ef}}{r_N} \left(\frac{1}{\kappa_{N+1}^2} - \frac{1}{\kappa_N^2} \right) f_N = 0,$$

$$\frac{2\mu_N}{\pi r_N \kappa_N^2 W(\kappa_N r_N, \kappa_N r_{N-1})} f_{N-1} + \frac{m n_{ef}}{r_N} \left(\frac{1}{\kappa_{N+1}^2} - \frac{1}{\kappa_N^2} \right) e_N$$

$$+ \left(\frac{\mu_N W'(\kappa_N r_{N-1}, \kappa_N r_N)}{\kappa_N W(\kappa_N r_N, \kappa_N r_{N-1})} + \frac{\mu_{N+1} H_m^{(2)'}(\kappa_{N+1} r_N)}{\kappa_{N+1} H_m^{(2)}(\kappa_{N+1} r_N)} \right) f_N = 0. \qquad (5)$$

Полная линейная однородная система уравнений для $2N$ неизвестных величин $e_1, f_1, \ldots, e_N, f_N$ состоит из двух уравнений (4), $2(N-2)$-х уравнений (3) для внутренних границ между слоями и двух уравнений (5) для последней границы. Матрица коэффициентов этой системы имеет в каждой строке 4 ненулевых элемента, при этом их взаимное расположение в разных строках таково, что в целом матрица системы оказывается пятидиагональной. При рассмотрении мод с $m = 0$ получаются две независимые трехдиагональные системы для величин $e_1, \ldots, e_N$ и $f_1, \ldots, f_N$, что соответствует анализу TM_{0n} и TE_{0n} волн по отдельности.

Если рассматривается коаксиальный и(или) экранированный волновод, уравнения для первого и(или) последнего слоев следует изменить так, чтобы выполнялись граничные условия на металле. Эти формулы не приводятся из-за недостатка места.

Для расчета направляемой или вытекающей моды необходимо при заданном значении частоты найти такое значение β (или n_{ef}), при котором детерминант матрицы обращается в нуль. Это делается численно путем поиска корней нелинейного уравнения в комплексной плоскости. Для вычисления детерминанта используются эффективные алгоритмы, развитые для ленточных матриц. Тесты показывают, что новая методика требует практически такое же время для расчетов, что и ММП, поскольку в обоих алгоритмах количество вычислений цилиндрических функций одинаково.

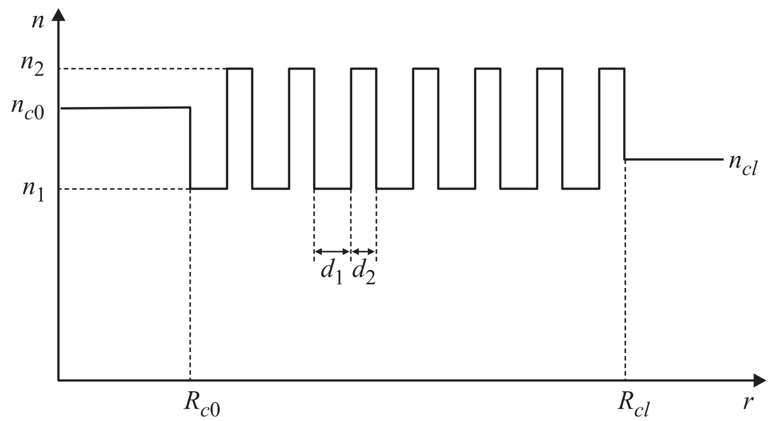

Рис. 2. Распределение показателя преломления по радиусу для брэгговского оптического волокна. R_{c0}, n_{c0} — радиус и показатель преломления сердцевины, d_1, d_2, n_1, n_2 — толщины и показатели преломления периодически чередующихся слоев, R_{cl}, n_{cl} — радиус и показатель преломления оболочки.

Проиллюстрируем результаты применения метода к расчету БВ. Используемые обозначения параметров для такого волновода и зависимость показателя преломления от радиуса $n(r)$ изображены на рис. 2. Выбором параметров можно снизить радиационное затухание в БВ до величин порядка 0.1 dB/km, при этом $\mathrm{Im} n_{ef}/\mathrm{Re} n_{ef} \sim 10^{-12}$ [3,6,7]. Расчет дисперсии с такой точностью представляет сложную задачу.

Рассмотрим две системы, на которых традиционно проверяется качество различных численных методов, применяемых для расчета брэгговских структур [9]. Параметры систем содержатся в табл. 1. Результаты расчета обеих систем данным методом и ММП приведены в табл. 2. Во всех случаях полученные результаты совпадают между собой с погрешностью до $1-2$ единиц в последнем разряде.

Продемонстрируем теперь пример расчета системы, для которой ММП неустойчив, для чего рассмотрим волновод с большим значением показателя преломления сердцевины (High index core Bragg fiber) [12]. Сердцевина волновода изготовлена из кварцевого стекла и в нем могут распространяться замедленные волны ($\mathrm{Re} n_{ef} > 1$). Параметры системы 3 приведены в табл. 1. Количество слоев N в работе [12] не ука-

Таблица 1. Параметры брэгговских оптических волокон

System	R_{c0}, μm	d_1, μm	d_2, μm	n_{c0}	n_1	n_2	n_{cl}	N	λ_0, μm
1	1.3278	0.2133	0.346	1.0	1.49	1.17	1.49	16	1.0
2	5.0	1.0	1.0	1.0	2.0	1.0	2.0	16	$\frac{2\pi}{1.2}$
3	0.942	0.248	0.942	n_{si}	1.0	n_{si}	1.0	10	–

Примечание. N — число „периодов“ радиальной структуры, λ_0 — длина волны в свободном пространстве, n_{si} — показатель преломления кварцевого стекла, рассчитываемый по формуле Зельмеера [13]. Остальные параметры пояснены на рис. 2.

Таблица 2. Сравнение результатов, полученных методом матрицы передачи и предлагаемым методом при расчете БВ

System	Mode	n_{ef} (ММП)	n_{ef} (Present)
1	TE_{01}	0.8910672174666644- -j1.42260467e-8	08910672174666645- -j1.42260468e-8
	TE_{02}	0.7920859030756938- -j1.8193225814233e-3	0.7920859030756934- -j1.8193225814232e-3
	Hybrid mode $(m = 1)$	0.8055778810976933- -j1.7391462898144e-3	0.8055778810976933- -j1.7391462898145e-3
2	TE_{01}	0.7859095653682807- -j1.64451e-12	0.7859095653682807- -j1.64449e-12
	TM_{01}	0.5270473281828841- -j5.765511844e-7	0.5270473281828834- -j5.765511839e-7

Примечание. Подчеркнуты цифры, различающиеся в данных, полученных двумя методами.

зано, поэтому было выбрано значение $N = 10$, увеличение этого числа практически не меняет действительной части показателя преломления. Так как в [12] результаты приведены в графическом виде и только для $\mathrm{Re} n_{ef}$, то для сопоставления такой выбор достаточен.

На рис. 3 показаны зависимости эффективного показателя преломления для нескольких азимутально-несимметричных мод $(m = 1)$ от безразмерной частоты Λ/λ_0, где $\Lambda = d_1 + d_2 = 1.190\,\mu$m. Сплошные кривые на рисунке — результаты работы [12], точки — расчеты по новой методике. Налицо полное совпадение результатов. В то же

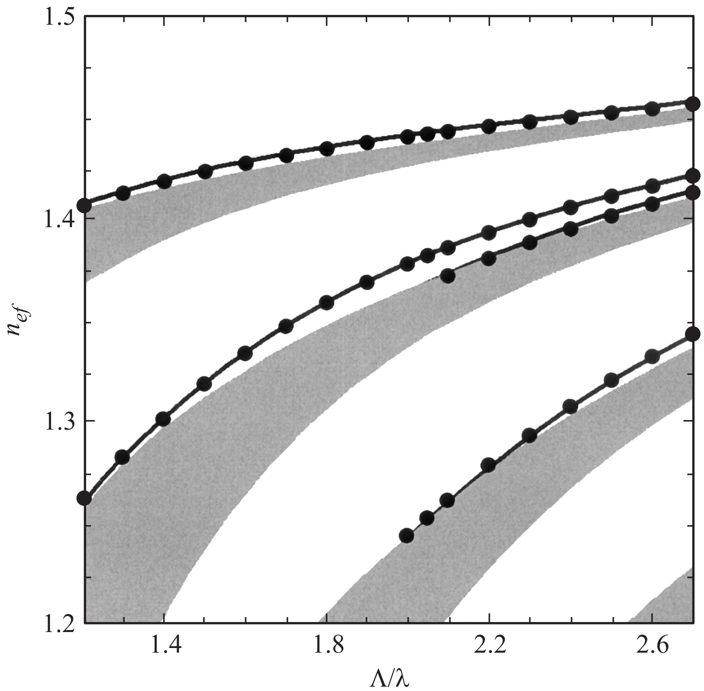

Рис. 3. Дисперсионные кривые для брэгговского волокна с сердцевиной из кварцевого стекла. Сплошные линии — данные из работы [12], точки — расчет предлагаемым методом. Серым цветом нанесены зоны прозрачности эквивалентного одномерного фотонного кристалла, образованного периодическим изменением показателя преломления в радиальном направлении.

время, если использовать ММП для расчета этой системы, уже при вычислении матрицы передачи для первого внешнего слоя появляется необходимость обращения почти сингулярной матрицы, и при дальнейшем перемножении матриц происходит потеря точности.

Приведенные примеры показывают эффективность нового метода расчета азимутально-симметричных слоистых электродинамических структур. Метод использовался также для исследования волноводов терагерцового диапазона на поверхностных плазменных модах, детали расчетов будут опубликованы в другом месте.

Работа поддержана грантами РФФИ № 06-02-16805 и 08-02-00621.

Автор благодарен А.Б. Маненкову за поддержку работы и критические замечания по тексту статьи и Л.В. Булгаковой за помощь в разработке программ.

Список литературы

[1] *Голант Е.И.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 24. С. 81–87.
[2] *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988.
[3] *Мелехин В.Н., Маненков А.Б.* // ЖТФ. 1968. Т. 38. В. 12. С. 2113–2115.
[4] *Themistos C., Rahman B.M.A., Rajarajan M.* et al. // Journal of Lighwave Technology. 2007. V. 25. N 9. P. 2456–2462.
[5] *Yu R.J., Zhang B., Zhang Y.-Q.* et al. // IEEE Photonics Technology Letters. 2007. V. 19. N 12. P. 910–912.
[6] *Yeh P., Yariv A.* // J. Opt. Soc. Am. 1978. V. 68. N 9. P. 1196–1201.
[7] *Маненков А.Б., Мелехин В.Н.* // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24. № 7. С. 1282–1290.
[8] *Ibanescu M., Fink Y., Fan S.* et al. // Science. 2000. V. 289. N 21. P. 415–419.
[9] *Guo S., Albin S., Rogowski R.S.* // Optics express. 2004. V. 12. N 1. P. 198–207.
[10] *Mayer A., Vigneron J.-P.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. N 4. P. 4659–4666.
[11] *Moharam M.G., Pommet D.A., Grann E.B.* // J. Opt. Soc. Am. 1995. V. 12. N 5. P. 1077–1086.
[12] *Monsoriu J.A., Silvestre E., Ferrendo A.* et al. Optics Expess. 2003. V. 11. N 12. P. 1400–1405.
[13] *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996.