05;08

Нелинейные волновые пучки в кристаллах с дислокациями

© А.В. Шекоян

Институт механики НАН Армении, Ереван
E-mail: ashotshek@mechins.sci.am

Поступило в Редакцию 8 октября 2008 г.

Изучаются нелинейные упругие волны в кристаллах с дислокациями. Уравнения имеют квадратичную нелинейность, коэффициенты уравнений постоянные. Выведено нелинейное уравнение модуляции с кубичной нелинейностью для амплитуды первой гармоники, а также дисперсионное уравнение и коэффициент поглощения. Исследованы устойчивость и фокусировка (самофокусировка) пучка волны.

PACS: 61.72.Lk, 43.25.Dc

Пусть в полубесконечной однородной анизотропной среде, принадлежащей к гексагональной или тетрагональной кристаллическим сингониям, вдоль оси шестого или четвертого порядка распространяется нелинейная упругая волна. Следует отметить, что такие оси есть и в других кристаллических сингониях, например, в кубических кристаллах. В среде имеется дислокационная сеть, удовлетворяющая всем условиям, описанным в работах [1,2]. Плоскость $x_3 = 0$ совпадает с границей среды, причем на границе $u_1 = u_2 = 0$, а в ее ограниченной области $u_3 \neq 0$, где u_1 и u_2 — поперечные смещения, а u_3 — продольное. При этом всюду имеет место условие $|u_{1,2}| \ll |u_3|$, т.е. образуются квазипродольные волны, когда доминирует продольная волна. Тогда малые эффекты диссипации, дисперсии, нелинейность и дислокационное смещение в основных порядках не будут давать вклада в уравнениях для поперечных смещений u_1 и u_2, а будут фигурировать только в уравнении для продольного смещения u_3 [3].

Следуя статьям [4,5], уравнения для ультразвуковой волны и смещения ξ_i дислокации можем написать в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$$A\frac{\partial \xi_i}{\partial t^2} + B\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = f_i, \tag{2}$$

где ρ — плотность кристалла, а тензор напряжений σ_{ik} и сила f_i, действующая на дислокацию, определяются соотношениями

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}, \qquad f_i = \frac{\partial F}{\partial \xi_i}, \tag{3}$$

F — свободная энергия единицы объема кристалла, u_{ik} — тензор деформации. В уравнении (2) A и B — постоянные коэффициенты, характеризующие массу и затухание дислокации.

Свободная энергия F имеет вид

$$F = \frac{1}{2}c_{ijkl}u_{ij}u_{kl} + \frac{1}{2}\lambda_{ik}\xi_i\xi_k + \frac{1}{2}\beta_{ijkl}(b_i\xi_j + b_j\xi_i)u_{kl} + \frac{1}{3!}Q_{iklmpq}u_{ik}u_{lm}u_{pq}$$

$$+ \frac{1}{3!}\gamma_{ikl}\xi_i\xi_k\xi_l + \frac{1}{3}q_{ijklpq}(b_i\xi_j + b_j\xi_i)(b_k\xi_l + b_l\xi_k)u_{pq}, \tag{4}$$

где c_{iklm}, Q_{iklmpq} — тензоры линейной и нелинейной упругости, b_i — компонента вектора Бюргерса, β_{ijkl}, q_{ijklpq} — тензоры линейного и нелинейного акустодислокационного взаимодействия, λ_{ik} и γ_{ikl} — тензоры линейной и нелинейной „жесткости“ дислокаций.

Используя соотношения (3) и (4), из (1) и (2), получим следующие уравнения:

$$\rho\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} = (c_{13} + c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_{1,2}\partial x_3} + c_{44}\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x_{1,2}^2}, \tag{5}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = (c_{13} + c_{44})\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + c_{44}\Delta_\perp u_3$$

$$+ c_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (3c_{33} + Q_{333})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial \xi}{\partial x_3} + \beta b\frac{\partial \xi}{\partial x_3}, \tag{6}$$

$$A\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + B\frac{\partial \xi}{\partial t} = \lambda\xi + b\beta\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{1}{2}b\beta\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{1}{2}\gamma\xi^2 + \frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \tag{7}$$

Так как колебание дислокаций происходит в одной плоскости, уравнение (7) написано в одномерном приближении. Другие компоненты имеют более высокий порядок малости.

В уравнении (6) первое нелинейное слагаемое обусловлено физической и геометрической нелинейностями, а в уравнении (7) первое нелинейное слагаемое обусловлено геометрической нелинейностью, второе — дислокационной, а последнее — акустодислокационным взаимодействием.

Наличие дисперсии и диссипации дает возможность искать решение системы (5)–(7) в виде квазимонохроматической волны в следующем виде [3,6–8]:

$$(u_i, \xi) = \frac{1}{2}\Big\{[u_{0i}(x_i), \xi_0(x_i)] \exp[i(kx_3 - \omega t)] + [u'_{0i}(x_i)\xi'_0(x_i)] \exp[2i(kx_3 - \omega t)] + [u''_{0i}, \xi''_0] + k.c.\Big\}, \qquad (8)$$

где $\omega = \omega_1 + i\alpha$ — комплексная частота, α — коэффициент поглощения акустической волны, k — волновое число, u_{0i} и ξ_0 — медленно меняющиеся комплексные амплитуды первой гармоники, штрихованные величины — второй гармоники, а дважды штрихованные — свободные члены.

Поступая аналогично, как в статьях [3,6–8], можно получить уравнения для амплитуды первой гармоники, линейной дисперсии и коэффициента поглощения:

$$(P_1 + iP_2)\Delta_\perp u_{03} + 2ik\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} = (T_i + iT_2)|u_{03}|^2 u_{03}, \qquad (9)$$

$$\omega_1 = kv_0\left[1 - \frac{\beta^2 b^2(A_0\omega_0^2 + \lambda)}{2c_{33}[(A\omega_0^2 + \lambda)^2 + \omega_0^2 B^2]}\right],$$

$$\alpha = \frac{k^2\beta^2 b^2 B}{2\rho[(A\omega_0^2 + \lambda)^2 + \omega_0^2 B^2]},$$

$$\omega_0 = kv_0, \qquad \Delta_\perp \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \qquad v_0^2 = \frac{c_{33}}{\rho}.$$

Коэффициенты уравнения (9) имеют следующий вид:

$$P_1 = \frac{1}{c_n}\left[c_{44} - \frac{k^2(c_{13} + c_{44})^2}{k^2 c_{44} - \omega_1^2\rho}\right], \quad c_n = c_{33}\left[1 - \frac{b^2\beta^2}{2c_{33}(A\omega_1^2 + \lambda)}\right],$$

$$P_2 = \frac{2\omega\alpha\rho(c_{13}+c_{44})^2}{c_n(k^2c_{44}-\omega_1^2\rho)}, \quad T_1 = M_1(M_2 - M_3M_4) + M_5M_4,$$

$$T_2 = 2M_1\omega_0 B(M_2 - M_3M_4) + \frac{2\omega_0^2 A + \lambda}{\omega_0^2 A + \lambda} BM_5M_4,$$

$$M_1 = \frac{k^2 n(\omega_0^2 A + \lambda)}{16c_n\beta^4 b^4}, \quad M_2 = -\frac{n}{2} + \frac{2b^4\beta^2 q}{3},$$

$$M_3 = \frac{2b\beta}{9\omega_0^2 A(\omega_0^2 A + \lambda)}, \quad n = 3c_{33} + Q_{333},$$

$$M_4 = -\frac{n(\omega_0^2 A + \lambda)}{4\beta b} - \frac{b\beta}{4} + \frac{k^2\gamma b^2\beta^2}{4} + \frac{q^2 b^3\beta}{3(\omega_0^2 A + \lambda)},$$

$$M_5 = \frac{4k^2 b^3\beta}{27c_n\omega_0^2 A(\omega_0^2 A + \lambda)}.$$

Из этих формул видно, что слагаемые, где присутствует величина n, обусловлены упругой нелинейностью. Слагаемое $\frac{b\beta}{4}$ обусловлено геометрической нелинейностью. Когда интенсивность ультразвуковой волны мала, так что упругая и геометрическая нелинейности не проявляются, то величины n и $\frac{b\beta}{4}$ надо полагать нулями и коэффициенты T_1 и T_2, обусловленные дислокационной нелинейностью, упрощаются. В данной дифракционной задаче свободные члены в (8) — малые более высокого порядка.

Наличие коэффициента T_2, обусловленного нелинейным поглощением, существенно влияет на устойчивость и фокусирование ультразвуковой волны [8]. Наличие оператора $\Delta_\perp$ обусловливается дифракцией пучка.

Условие устойчивости модуляционной ультразвуковой волны имеет вид [8] $\operatorname{Im} k_3' \geqslant 0$ $(x_3 > 0)$, где k_3' — волновое число ультразвуковой волны модуляции. Из анализа выражения для k_3' следует, что если $2P_2k_\perp^2 + 2a_1^2T_2 \geqslant 0$, то при $k_\perp(P_1^2 + P_2^2) + a_1^2(3P_2T_2 + 2P_1T_1) > 0$ имеет место устойчивость, а при обратном знаке последнего неравенства — неустойчивость, a_1 — амплитуда модуляционной волны.

Уравнение (8) в рамках теории узких пучков [6–8] дает возможность исследовать фокусирование. Например, если исходный фронт плоский, то самофокусировка будет, если $f'(0) = -\frac{1}{2}T_2a_0^2k^{-1} < 0$, что имеет место при $T_2 > 0$, a_0 — амплитуда при $x_3 = 0$.

Таким образом, ограничиваясь квадратичной нелинейностью в исходных уравнениях, выведено трехмерное уравнение (9) для комплексной амплитуды первой гармоники с кубической нелинейностью. Наличие кубичной нелинейности обусловлено взаимодействием первой и второй гармоник. Итак, уравнением (9) можно описать процессы самовоздействия.

Список литературы

[1] *Труелл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972.

[2] *Гранато А., Люкке К.* // Физическая акустика. Т. III. Ч. А. М.: Мир, 1969. С. 261–318.

[3] *Шекоян А.В.* // Изв. АН Арм. ССР. Физика. 1988. Т. 23. № 5. С. 283–288.

[4] *Бурлак Г.Н., Островский И.В.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 18. С. 69–74.

[5] *Ерофеев В.И.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 4. С. 32–36.

[6] *Шекоян А.В.* // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1982. Т. 35. № 5. С. 27–37.

[7] *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1981. Т. 34. № 3. С. 3–17.

[8] *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* // Акустический журнал. 1999. Т. 45. № 2. С. 149–156.