

01;07

О граничной дифракционной волне в теории Френеля—Кирхгофа

© П.Н. Дагуров, А.В. Дмитриев

Бурятский научный центр СО РАН, Улан-Удэ
E-mail: dpn@pres.bscnet.ru

В окончательной редакции 16 октября 2008 г.

Предложен метод преобразования дифракционного поверхностного интеграла Френеля—Кирхгофа в интеграл по контуру, ограничивающий поверхность, при нахождении точки наблюдения в зоне Френеля. Получено выражение для поля граничной волны при параметрическом задании контура. Приведены примеры применения полученных соотношений. Проведено сравнение расчетных зависимостей с экспериментальными результатами.

PACS: 42.25.Fx, 42.25.Gy

Теория дифракции Френеля—Кирхгофа находит широкое применение в оптике, акустике, радиофизике и других разделах физики, связанных с волновым движением. Физической основой теории, как известно, является введенное Френелем представление поля за непрозрачным экраном в виде результирующего действия гюйгенсовских источников, распределенных по отверстию в экране. Другой подход к дифракции связан с именами Юнга, Магги и Рубиновича. Гипотеза Юнга о существовании волны, исходящей от освещенного края препятствия, была математически подтверждена Магги и Рубиновичем, преобразовавшим поверхностный дифракционный интеграл Френеля—Кирхгофа в контурный [1,2]. Такое преобразование представляет дифракционное поле в виде граничной волны в теневой области и в виде суммы первичного поля и граничной волны в освещенной зоне. Данный подход имеет ряд преимуществ. Так, вычисление одномерного интеграла заметно проще вычисления поверхностного интеграла и, кроме того, при необходимости легче осуществить его оценку асимптотическими методами, например методом стационарной фазы. В ряде случаев представление о граничной волне наиболее адекватно объясняет наблюдающиеся дифракционные явления. Однако подход Юнга—Магги—Рубиновича до

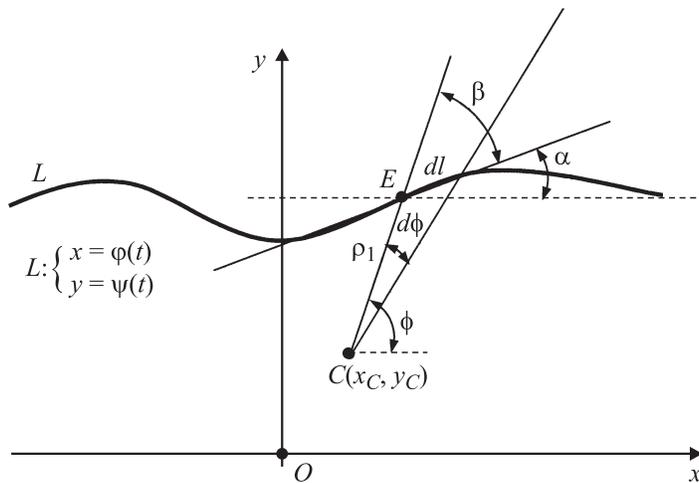


Рис. 1. Геометрия задачи — вид в плоскости экрана.

настоящего времени не нашел столь же широкого распространения, как традиционная трактовка дифракционных явлений. Возможно, это связано с определенной громоздкостью преобразования поверхностного интеграла в контурный [1–3]. Известны также общие методы преобразования поверхностного интеграла в линейный, основанные на двумерном варианте теоремы Остроградского–Гаусса или теореме Стокса. Применительно к быстроосциллирующему дифракционному интегралу общего вида такое преобразование, по-видимому, впервые выполнено в [4] с использованием метода стационарной фазы. В настоящей работе предлагается способ получения граничной дифракционной волны, с самого начала использующий аппроксимации Френеля (параксиальная область, квадратичный волновой фронт), и получено явное выражение для граничной волны при параметрическом задании контура, отсутствующее в известной литературе.

Пусть монохроматическая волна распространяется от точечного источника $P_0(0, 0, 0)$ к точке наблюдения $P(x_P, y_P, d_1 + d_2)$. Между точками P_0 и P перпендикулярно оси z на расстоянии d_1 от источника расположен плоский непрозрачный экран, граница которого задана кривой L . В точке C пересечения линии P_0P с плоскостью экрана разме-

стим начало полярной системы координат (ρ, ϕ) (рис. 1). Рассмотрим вначале ситуацию, когда точка наблюдения находится в области тени (апертура отверстия на рис. 1 выше кривой L). Тогда поле дифракции Френеля–Кирхгофа в приближении малых углов дифракции, созданное гюйгенсовскими источниками сектора $d\phi$ в точке P , имеет вид

$$dU = -\frac{i}{\lambda} \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{\exp(ik(r_1 + r_2))}{r_1 r_2} \rho d\rho d\phi, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны.

Используя приближение Френеля, можно записать для фазового множителя в (1)

$$r_1 + r_2 \approx d_1 + d_2 + \frac{x_p^2 + y_p^2}{2(d_1 + d_2)} + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} \right) \approx r_p + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right),$$

где

$$r_p = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + x_p^2 + y_p^2} \approx d_1 + d_2 + (x_p^2 + y_p^2)/[2(d_1 + d_2)].$$

Полагая, как обычно, в амплитудных множителях $r_1 \approx d_1$, $r_2 \approx d_2$, получим

$$dU = -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikr_p)}{d_1 d_2} d\phi \int_{\rho_1}^{\infty} \exp(i\pi\rho^2/b^2) \rho d\rho = \frac{\exp(ikr_p)}{d_1 + d_2} \frac{d\phi}{2\pi} \exp(i\pi\rho^2/b^2), \quad (2)$$

где $b^2 = \lambda d_1 d_2 / (d_1 + d_2)$ — радиус первой зоны Френеля в плоскости препятствия. При вычислении несобственного интеграла (2) использован известный прием, при котором полагается, что k обладает малой мнимой частью.

Используя соотношение $d\phi = (dl/\rho) \sin\beta$ и интегрируя по контуру L , получим следующее выражение для поля граничной волны

$$U = \frac{\exp(ikr_p)}{2\pi(d_1 + d_2)} \oint_L \exp(i\pi\rho^2/b^2) \frac{\sin\beta}{\rho} dl \\ \approx \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{\exp(ik(r_1 + r_2))}{r_1 + r_2} \frac{\sin\beta}{\rho} dl. \quad (3)$$

Сравнение выражения (3) с известным результатом для граничной волны [1,2], показывает их согласие при малых углах дифракции, когда, собственно, и справедлива теория Френеля–Кирхгофа. Изложенный метод получения граничной волны представляется более наглядным, чем приведенный в [2], поскольку граничная волна возникает в результате преобразования гюйгенсовских волн непосредственно от элементов отверстия в экране, а не как результат действия гюйгенсовских источников поверхности конуса „свет–тень“.

Если точка наблюдения находится в освещенной области (экран находится выше L), то выражение (2) принимает вид

$$\begin{aligned} dU &= -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikr_p)}{d_1 d_2} d\phi \int_0^{\rho_1} \exp(i\pi\rho^2/b^2) \rho d\rho \\ &= \frac{\exp(ikr_p)}{d_1 + d_2} \frac{d\phi}{2\pi} [1 - \exp(i\pi\rho_1^2/b^2)], \end{aligned} \quad (4)$$

а для результирующего поля получим с учетом направления обхода контура

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \frac{\exp(ikr_p)}{d_1 + d_2} \frac{1}{2\pi} \oint_L \exp(i\pi\rho^2/b^2) \frac{\sin\beta}{\rho} dl \\ &\approx U_0 + \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{\exp(ik(r_1 + r_2))}{r_1 + r_2} \frac{\sin\beta}{\rho} dl, \end{aligned} \quad (5)$$

где $U_0 = \exp(ikr_p)/r_p \approx \exp(ikr_p)/(d_1 + d_2)$ — напряженность поля в точке P в отсутствие препятствия.

Введем множитель прохождения поля $W = U/U_0$ и представим формулы (3) и (5) в следующем объединенном виде:

$$W = \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \oint_L \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{b^2}\right) \frac{\sin\beta}{\rho} dl, \quad (6)$$

где $\varepsilon = 1$, если точка наблюдения находится в освещенной области, и $\varepsilon = 0$ в случае нахождения ее в тени.

Найдем явное выражение для W . В случае параметрического задания кривой L уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($t \in [t_0, T]$) элемент дуги задается выражением $dl = \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} dt$. Здесь φ' и ψ' — производные функций φ и ψ . Из геометрии задачи следует

$$\frac{\sin \beta}{\rho_1} dl = \frac{\sin \phi \cos \alpha - \cos \phi \sin \alpha}{\rho_1} dl = \frac{\varphi'(\psi - y_C) - \psi'(\varphi - x_C)}{(\varphi - x_C)^2 + (\psi - y_C)^2} dt, \quad (7)$$

где $x_C = x_P d_1 / (d_1 + d_2)$, $y_C = y_P d_1 / (d_1 + d_2)$. Подставляя (7) в (6), получим

$$W = \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^T \exp \left\{ \frac{i\pi}{b^2} [(\varphi - x_C)^2 + (\psi - y_C)^2] \right\} \frac{\varphi'(\psi - y_C) - \psi'(\varphi - x_C)}{(\varphi - x_C)^2 + (\psi - y_C)^2} dt. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые примеры использования формулы (8).

Для непрозрачной полуплоскости с кусочно-линейным краем из (8) нетрудно получить решение в виде суммы обобщенных интегралов Френеля $G(z, \alpha) = \alpha \int_z^\infty \exp(i(t^2 + \alpha^2)) / (t^2 + \alpha^2) dt$. Этот же результат получается и путем непосредственного преобразования поверхностного интеграла Френеля–Кирхгофа [5]. Таким образом, в данном случае применение граничной волны не дает ничего нового (за исключением физического подхода) ввиду того, что исходные поверхностные интегралы можно преобразовать в одномерные без использования представлений о граничной волне, а полученные выражения в обоих случаях совпадают.

Для кругового отверстия в случае радиальной симметрии поля в апертуре существует классическое решение в виде одномерного интеграла [2,6], который при нормальном падении плоской волны на отверстие радиуса R с центром на оси z имеет вид

$$W = \frac{ik}{d_2} \exp \left[-ik \left(d_2 + \frac{r_0^2}{2d_2} \right) \right] \int_0^R J_0(krr_0/d_2) \exp(-ikr^2/2d_2) r dr, \quad (9)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Интеграл (9) при традиционном подходе вычисляется в функциях Ломмеля [2]. Полагая в (8)

$d_1 = \infty$ (плоская волна), после параметрического задания окружности получим

$$W = \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R(r_0 \cos(t - \varphi_0) - R)}{R^2 - 2Rr_0 \cos(t - \varphi_0) + r_0^2} \times \exp\left(\frac{ik}{2d_2}(R^2 - 2Rr_0 \cos(t - \varphi_0) + r_0^2)\right) dt. \quad (10)$$

В формулах (9) и (10) r_0, φ_0 — полярные координаты точки P . Преобразование интеграла (10) в (9) осуществить не удастся. Поэтому для сравнения были проведены вычисления непосредственно по данным формулам, которые показали, что в вычислительном плане в случае нормального падения волны между обоими подходами нет различия (относительная ошибка меньше 10^{-12}). Формула (9), однако, не применима в случае наклонного падения волны на отверстие, тогда как (10) легко описывает эту ситуацию. На рис. 2, *a* показаны результаты расчетов по формулам (9) и (10) для распределения уровня поля поперек оси z , которые совпадают между собой. Для сравнения также приведены результаты расчета по формуле (4) из статьи [7], полученной для кругового отверстия с использованием результатов работы [4] для гауссова пучка. При расчете диаметр пучка полагался бесконечно большим. Из рис. 2, *a* следует, что результаты [7] справедливы только вблизи оси z . На рис. 2, *b* показаны расчетные (формула(8)) и экспериментальные результаты при дифракции на круговом отверстии сферической волны, из которых следует хорошее согласие между расчетом и экспериментом. Эксперимент был выполнен на частоте 30 GHz. Антеннами служили открытые концы волноводов размером $(7.2 \times 3.4) \cdot 10^{-3}$ м. В качестве экрана, в котором вырезалось отверстие, использовалась алюминиевая фольга, наклеенная на картонную основу.

В отличие от кругового отверстия представление поля эллиптического отверстия в виде одномерного интеграла при традиционном подходе не существует. Поле эллиптического отверстия, край которого описывается параметрическими уравнениями $x = A \cos t, y = B \sin t$

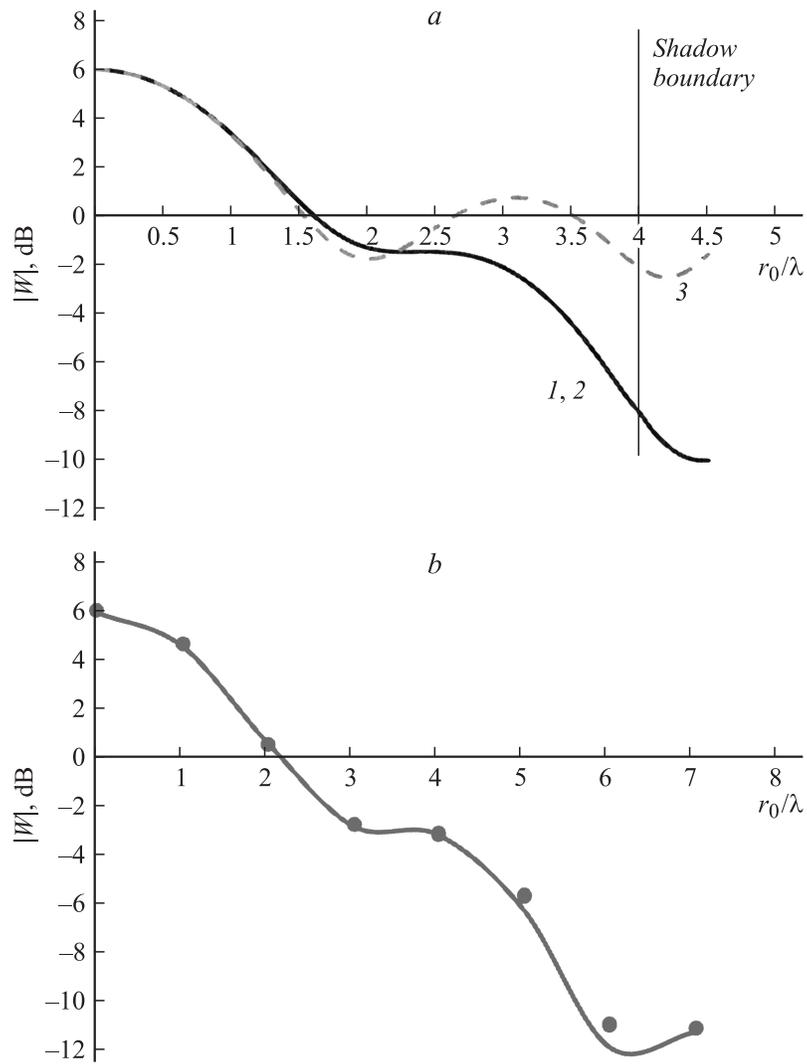


Рис. 2. Распределение уровня поля за круговым отверстием. *a* — плоская волна $R = 4\lambda$, расчет по формуле: 1 — (10); 2 — (11); 3 — (5) из [7]; *b* — сферическая волна $R = 2.5\lambda$, $d_1 = d_2 = 14\lambda$, сплошная кривая — расчет, кружки — эксперимент.

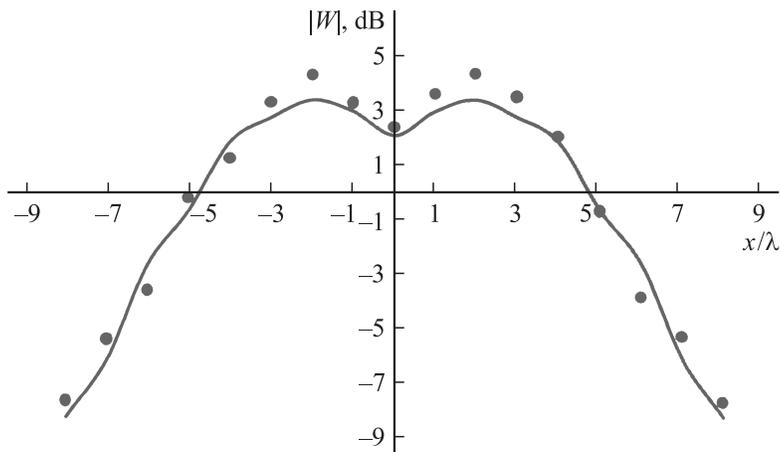


Рис. 3. Распределение уровня поля за эллиптическим отверстием. $A/B = 2$, сплошная кривая — расчет, кружки — эксперимент.

($t \in [0, 2\pi]$), имеет вид

$$W = \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x_C B \cos t + y_C A \sin t - AB}{(A \cos t - x_C)^2 + (B \sin t - y_C)^2} \times \exp\left(\frac{i\pi}{b^2} [(A \cos t - x_C)^2 + (B \sin t - y_C)^2]\right) dt. \quad (11)$$

На рис. 3 в качестве примера приведено пространственное распределение модуля множителя прохождения поля поперек оси z , рассчитанное по формуле (11). Для сравнения также представлены результаты эксперимента, полученные на частоте 30 GHz.

Таким образом, в работе приведен новый вывод выражения для граничной волны в области дифракции Френеля и получена формула, описывающая дифракцию на крае отверстия, заданном произвольными параметрическими уравнениями. Экспериментальные результаты подтвердили расчетные зависимости. Представление дифракционного поля в виде граничной волны выглядит предпочтительным в связи с развитием вычислительной техники и современных программных средств,

допускающих эффективное вычисление одномерных дифракционных интегралов.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 08-02-98003.

Список литературы

- [1] Хёйл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
- [2] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
- [3] Gordon B.G., Bilow H.J. // IEEE Trans. Ant. Prop. 2002. V. 50. N 3. P. 308–314.
- [4] Коиторович М.И., Муравьев Ю.К. // ЖТФ. 1952. Т. 22. № 3. С. 394–407.
- [5] Дагуров П.Н., Заяханов А.С., Чимитдоржиев Н.Б. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 20. № 2. С. 199–207.
- [6] Ахманов С.А., Никитин С.Ю. Физическая оптика. М.: МГУ, Наука, 2004. 656 с.
- [7] Любимов В.В., Шур В.Л., Эцин И.Ш. // Оптика и спектроскопия. 1978. Т. 45. В. 2. С. 368–373.