

04

## **Двухмерная кинетическая модель короткого сильноточного вакуумно-дугового разряда**

© Я.И. Лондер, К.Н. Ульянов

Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина, Москва  
E-mail: kulyanov@vei.ru

Поступило в Редакцию 28 июля 2009 г.

Разработана двухмерная математическая модель короткого сильноточного вакуумно-дугового разряда, в которой замагниченные электроны движутся в гидродинамическом режиме, а быстрые катодные ионы — в режиме свободного пролета в двухмерном электрическом поле. Модель учитывает распределение ионов по углам вылета на катодной границе плазмы. Предложен метод расчета распределения концентрации плазмы в промежутке. Рассчитаны двухмерные распределения плотности плазмы, электрического поля и плотности тока разряда во внешнем продольном магнитном поле. Показано, что имеет место взаимное пересечение ионных траекторий, возвращение части ионных траекторий на катод, а также поворот части ионных траекторий во встречном электрическом поле вблизи боковой границы плазмы. При уменьшении внешнего магнитного поля уменьшается число достигающих анода ионных траекторий. Наступает ионное „голодание“, которое может приводить к нарушению стационарного токопереноса.

При математическом моделировании короткого сильноточного вакуумно-дугового разряда (ВДР) во внешнем магнитном поле обычно применяются  $2D$ -модели, основанные на уравнениях магнитной гидродинамики [1–3]. Предполагается, что быстрые катодные ионы и замагниченные электроны при движении к аноду испытывают большое число столкновений. Для электронов такое предположение справедливо. Для ионов ситуация не столь очевидна. Ионы вылетают из катодных факелов с широким угловым распределением и имеют среднюю поперечную энергию, сравнимую с продольной. Наличие большой поперечной энергии (кинетической температуры) приводит к тому, что в сильноточном ВДР возможны как столкновительные, так и бесстолкновительные режимы движения быстрых катодных ионов. В работе [4] для различных

видов угловых распределений ионов определено значение плотности тока  $j^*$ , при которой ионы в промежутке длиной  $Y_0$  испытывают одно соударение. При  $j < j^*$  ионы движутся практически без столкновений. Именно бесстолкновительный режим движения ионов будет рассмотрен в настоящей работе.

Рассмотрим модель токопереноса и течения плазмы в ВДР, находящемся в однородном внешнем магнитном поле  $B_y$ . Используем декартову систему координат  $XYZ$ . Катод поместим в плоскости  $Y = 0$ , анод — в плоскости  $Y = Y_0$ , поперечный размер разряда —  $2X_0$  с правой границей при  $x = X_0$ . В направлении оси  $Z$  разряд будем считать неограниченным. Ток разряда на единицу длины в направлении оси  $Z$  положим равным  $2I_0$ . Будем предполагать, что в каждой точке катодной границы плазмы абсолютная величина скорости ионов  $v_0$  постоянна и определяется их начальной энергией  $\varepsilon_0$ , а направления вылета в плоскости  $x-y$  равновероятно распределены в диапазоне углов  $\pm\alpha_{\max}$ . Температуру электронов будем считать постоянной и равной  $T_e$ .

Распределение компонентов векторов электрического поля и плотности тока в плоскости  $X-Y$  описывается следующей системой уравнений:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{[\mathbf{j}\mathbf{B}]}{en_e} - \frac{1}{en_e} \text{grad} p_e, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (1)$$

Система уравнений (1) может быть сведена к одному уравнению в частных производных второго порядка относительно тока дуги  $I$  как функции координат  $x$  и  $y$  [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial I}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1 + \beta_y^2}{\sigma} \frac{\partial I}{\partial y} \right) = \frac{\mu_0 I}{e n_e^2} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial n_e}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right). \quad (2)$$

В (1) и (2)  $\sigma$  — проводимость плазмы,  $n_e$  — концентрация электронов,  $p_e$  — давление электронного газа,  $\beta_y = \sigma B_y / en_e$  — параметр Холла. Граничные условия к уравнению (2) следующие. В плоскости симметрии  $j_x(0, y) = 0$ , на боковой поверхности  $j_x(1, y) = 0$ . На границе анодный слой–плазма использовалось условие работы [5], допускающее существование на части анода положительного анодного падения [5]. На катодной границе плазмы распределение  $y$ -компонента плотности тока задавалось параболой  $j_y(x, 0) = j_0(1 - C_1 x^2)$ , где  $j_0 = j_x(0, 0)$ , а  $C_1 < 1$  — положительная константа. Чтобы решить уравнение (2) с указанными граничными условиями, необходимо знать зависимость

плотности плазмы  $n_e$  от координат  $x$  и  $y$ . Рассмотрим процедуру определения  $n_e(x, y)$  и решения уравнения (2) методом последовательных приближений. На первом шаге (2) решалось в предположении, что ионы движутся вдоль оси  $Y$  со скоростью  $v_0$ , а плотность плазмы определяется как  $n_e(x) = \gamma j_y(x, 0)/ev_0$  [6] ( $\gamma$  — доля ионного тока). Полученное в результате решения распределение  $I(x, y)$  позволяет рассчитать компоненты векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ . Затем эти компоненты использовались при решении уравнения движения ионов, имеющего вид:

$$\frac{M}{eZ_i} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — вектор ионной скорости,  $M$  — масса иона,  $Z_i$  — средний заряд. Уравнение (3) не содержит концентрации ионов и описывает движение отдельного иона в электрическом и магнитном полях. Решение уравнения (3) определяет конфигурации ионных траекторий.

Для расчета плотности ионов  $n_i(x, y) = n_e(x, y)/Z_i$  разобьем область плазмы на ячейки и определим число ионов, создаваемых в каждой ячейке проходящими через нее ионными траекториями. С каждой ионной траекторией связан определенный поток ионов. Этот поток для каждой траектории может быть выражен через распределение тока  $I(x, 0)$  на катодной границе плазмы рекуррентным соотношением:

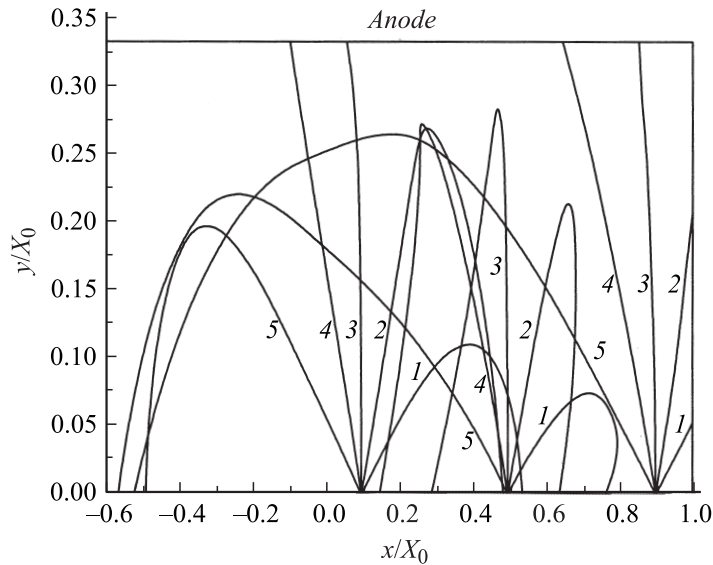
$$N_k v_k = (\gamma/e)(I(x_k, 0) - I(x_{k-1}, 0)). \quad (4)$$

Здесь  $k$  — номер траектории,  $N_k$  — число ионов на единицу длины траектории,  $v_k$  — скорость ионов вдоль траектории,  $x_k$  — координата вылета траектории на катодной границе плазмы. Учитывая, что  $v_k = ds_k/dt$ , где  $s_k$  — длина траектории, можно получить выражение для числа ионов  $\Delta N_k$ , создаваемых ионным потоком  $k$ -й траектории в выбранной ячейке:

$$\Delta N_k = \int N_k ds_k = N_k v_k \Delta t_k. \quad (5)$$

Здесь  $\Delta t_k$  — время пролета ионов через выбранную ячейку. С учетом (4) вклад ионного потока  $k$ -й траектории в плотность ионов в заданной ячейке можно записать как

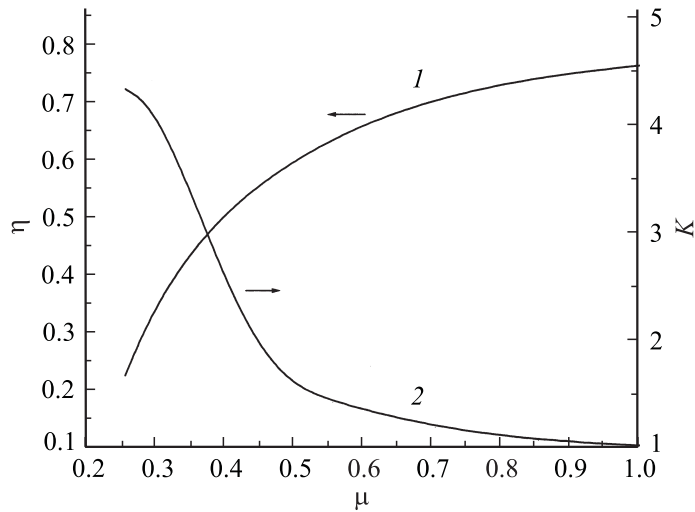
$$(n_i)_k = \frac{L}{X_0 Y_0} \frac{\gamma}{e} (I(x_k, 0) - I(x_{k-1}, 0)) \Delta t_k. \quad (6)$$



**Рис. 1.** Вид ионных траекторий при  $\mu = 0.25$ . Цифры у кривых соответствуют определенному углу вылета траекторий: 1 —  $60^\circ$ , 2 —  $30^\circ$ , 3 —  $0^\circ$ , 4 —  $-30^\circ$ , 5 —  $-60^\circ$ .

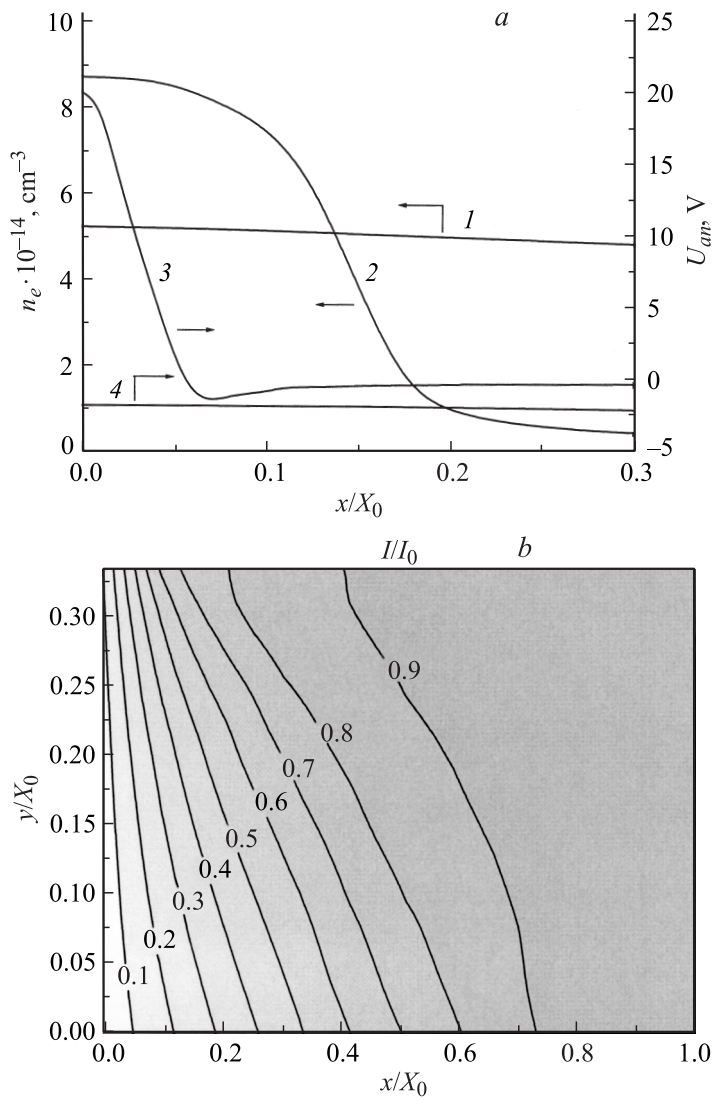
В (6)  $L$  — полное число ячеек. (Размер ячеек вдоль оси  $Z$  предполагается единичным). Суммируя вклады от всех траекторий, проходящих через выбранную ячейку, получим искомую плотность ионов. Таким образом, задача становится замкнутой.

Расчеты параметров ВДР проводились для паров меди. В настоящей работе приведем результаты для случая  $C_1 = 1$ . В расчетах исследовалась зависимость решений уравнений (2)–(6) от безразмерного параметра  $\mu = B_y / (\mu_0 I_0)$ . Использовались следующие значения исходных величин:  $X_0 = 3$  см,  $Y_0 = 1$  см,  $v_0 = 1.5 \cdot 10^6$  см/с,  $\gamma = 0.08$ ,  $T_e = 2$  эВ,  $I_0 = 1500$  А/см. Рассматривались траектории, выходящие с катодной границы плазмы в диапазоне углов  $\pm 60^\circ$  с шагом  $15^\circ$ . При каждом значении угла рассчитывалось 200 траекторий с равноотстоящими по координате  $x$  точками вылета. Результаты приведены на рис. 1–3. На рис. 1 для  $\mu = 0.25$  показаны траектории ионов, исходящие из точек



**Рис. 2.** Зависимость относительной доли  $\eta$  ионных траекторий, достигающих анода, и коэффициента контракции тока  $K$  от параметра  $\mu$ : 1 —  $\eta$ ; 2 —  $K$ .

с координатами  $x = 0.1$ ,  $x = 0.5$  и  $x = 0.9$  при значениях угла вылета  $\pm 60^\circ$ ,  $\pm 30^\circ$  и  $0^\circ$ . Из рис. 1 видно, что при  $\mu = 0.25$  значительное число траекторий возвращается на катод. Этот факт связан с увеличением тормозящего электрического поля  $E_y$ , обусловленного увеличением угла наклона линий тока [3]. Результаты, приведенные на рис. 1, подтверждаются рис. 2, на котором показана относительная доля  $\eta$  доходящих до анода траекторий в зависимости от параметра  $\mu$ . На этом же рисунке приведен коэффициент контракции тока  $K$ , определяемый отношением  $j_y(0, Y_0)/j_y(0, 0)$ . При уменьшении  $\mu$  в прианодной области разряда вблизи плоскости симметрии сосредотачивается все большая часть тока, перенос которого при достаточно малых  $\mu$  обеспечивается хаотическим электронным током из плазмы, что приводит к образованию положительного анодного падения. На рис. 3, а в укрупненном масштабе приведено распределение по координате  $x$  плотности плазмы  $n_e$  и анодного падения  $U_{an}$  для  $\mu = 1$  и для  $\mu = 0.25$ . Видно, что анодное падение при  $\mu = 1$  отрицательно и слабо зависит от  $x$ , а при  $\mu = 0.25$  в узкой области вблизи плоскости симметрии имеет место



**Рис. 3.** Распределение плотности плазмы  $n_e$  и анодного падения  $U_{an}$  по координате  $x$  на анодной границе плазмы: 1, 2 —  $n_e$ , 3, 4 —  $U_{an}$ ; 1, 4 —  $\mu = 1$ , 2, 3 —  $\mu = 0.25$ . b — вид линий уровней тока.  $\mu = 0.25$ .

положительное анодное падение, достигающее  $\sim 20$  V. На рис. 3, *b* для  $\mu = 0.25$  показан вид линий тока. Хорошо видна контракция тока вблизи плоскости симметрии.

В настоящей работе для расчета параметров ВДР в продольном магнитном поле впервые использована бесстолкновительная для ионов  $2D$ -модель. Отметим несколько существенных отличий полученных результатов от расчетов, проведенных в гидродинамическом приближении с учетом столкновений ионов.

Во-первых, траектории ионов имеют гораздо более сложную форму. Наблюдаются пересечения траекторий, возвратное движение в направлении катода, поворот траекторий вблизи боковой границы.

Во-вторых, при уменьшении параметра  $\mu$  уменьшается количество ионных траекторий, доходящих до анода. В результате этого на части анодной поверхности наблюдается ионное „голодание“ и появляется положительное анодное падение. При некотором значении  $\mu^*$  количество ионных траекторий (концентрации плазмы) у анода недостаточно для прохождения на анод электронного тока. Это значение  $\mu^*$  определяет минимальное значение продольного магнитного поля, при котором возможен стационарный режим ВДР.

В-третьих, в бесстолкновительном режиме нет кризиса течения потока быстрых ионов, связанного с уменьшением их скорости до значения скорости ионного звука  $v_{is}$ . При гидродинамическом описании устойчивый режим ВДР имеет место только в том случае, если скорость катодных ионов превышает  $v_{is}$  во всем промежутке. Это различие весьма существенно. В работе [2] с использованием магнитогидродинамической  $2D$ -модели было показано, что при токе дуги  $I_0 > 7.5$  кА ионы достигают скорости  $v_{is}$  внутри промежутка. При этом возникает ударная волна, движущаяся в направлении катода. Авторы констатировали, что при  $I_0 > 7.5$  кА невозможно стационарное прохождение тока при сверхзвуковом режиме движения катодных ионов. Отметим, что в [2] при  $I_0 = 7.5$  кА плотность тока  $j$  составляла  $\sim 300$  А/см<sup>2</sup>, а число соударений ионов  $N_{col} \approx 1$ . В таком режиме ударная волна не может сформироваться. Более того, даже в режимах с большей плотностью тока (например, при  $j \approx 1$  кА/см<sup>2</sup>), где  $N_{col} \approx 1-3$ , формирование фронта ударной волны маловероятно. Для формирования фронта необходимо большее число соударений. Режимы с малым числом столкновений — это кинетические режимы, к которым должны быть применены соответствующие математические методы.

Обратим внимание, что распределение  $E_x$  в промежутке зависит от распределения  $j_y$  по поверхности катода [6]. При  $j_y = \text{const}$  в результате пинч-эффекта возникает сильное поле  $E_x$ , которое уменьшается при неоднородном распределении  $j_y$  с максимумом в центре. Существует распределение  $j_y$ , при котором катодная граница плазмы эквипотенциальна. В этом случае поле  $E_x$  в промежутке минимально. В случае эквипотенциальной катодной границы основным эффектом будет разворот ионных траекторий в тормозящем электрическом поле, а также уход ионов через боковые границы плазмы.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 08-08-13520-офи\_ц и 09-08-00368а).

## Список литературы

- [1] *Beilis I., Keidar M., Boxman R.L.* // J. Appl. Phys. 1998. V. 83. N 2. P. 709–717.
- [2] *Schade E., Shmelev D.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2003. V. 31. N 5. P. 890–901.
- [3] *Londer Ya.I., Ulyanov K.N.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2007. V. 35. N 4. P. 897–904.
- [4] *Лондер Я.И., Ульянов К.Н.* // ТВТ. 2003. Т. 41. № 1. С. 5–15.
- [5] *Wieckert C., Egli W.* // IEEE Trans. Plasma. Sci. 1989. V. 17. N 5. P. 649–652.
- [6] *Londer Ya., I., Ulyanov K.N.* // IEEE Trans. Plasma. Sci. 2009. V. 37. N 8. P. 1362–1366.