01

Стабилизация фрактального осциллятора инерциальными воздействиями

© В.В. Афанасьев, М.П. Данилаев, Ю.Е. Польский

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева
E-mail: danilaev@mail.ru

Поступило в Редакцию 24 ноября 2009 г.

Определены параметры внешних стабилизирующих инерциальных воздействий на фрактальный осциллятор, позволяющие обеспечить требуемую моду его поведения. Показано, что возвращающая сила в рассматриваемом нелинейном фрактальном осцилляторе (1) зависит не только от квадрата амплитуды внешнего гармонического воздействия, но и от знакопеременного сомножителя.

Обеспечение необходимых режимов поведения (регулярных или стохастических) многомодовых динамических систем (ДС) и заданных направлений процессов формирования многомодовых фрактальных структур требует определения параметров внешних стабилизирующих воздействий. Условие малости связей между отдельными модами позволяет формализовать математическое представление многомодовых ДС набором обобщенных нелинейных (для нелинейных ДС) или фрактальных (для фрактальных ДС) осцилляторов [1]. В рамках представления многомодовых ДС набором связанных обобщенных осцилляторов обеспечение заданного режима поведения многомодовых систем требует анализа стабилизирующего воздействия на обобщенный осциллятор. Одним из эффективных видов стабилизирующих воздействий на многомодовую динамическую систему является инерциальное воздействие (ИВ) [2]. Анализ периодического во времени инерциального воздействия на нелинейный осциллятор, проведенный в работах [2,3] методом Капицы, позволил получить нетривиальные результаты, на основании которых были предложены эффективные методы стабилизации сложных динамических систем, поведение которых описывается подобными уравнениями. В то же время необходимость обеспечения требуемой моды поведения (заданного режима поведения) многомодовых фрактальных систем требует проведения аналогичных исследований для нелинейных фрактальных осцилляторов.

Цель настоящей работы состоит в определении параметров внешних стабилизирующих инерциальных воздействий на фрактальный осциллятор, обеспечивающих требуемую моду его поведения.

Дифференциальное уравнение фрактального осциллятора имеет вид

$$D^{\alpha}_{Tt}x + f(x,\alpha) = F(x,t), \tag{1}$$

при начальных условиях

$$D^{\alpha-k}x\Big|_{t=+0} = b_k, \qquad k = 1, 2. \tag{2}$$

Здесь $F(x,t)$ — нелинейная функция, учитывающая внешние (флуктуационные и стабилизирующие) воздействия на рассматриваемую моду; b_k — постоянные величины; D^{α}_{Tt} — оператор дробного дифференцирования порядка α [4,5].

Анализ инерциальных воздействий на фрактальный осциллятор (1) в работе проводился, следуя методике Капицы, при воздействии на фрактальный осциллятор зависящего от x внешнего гармонического воздействия вида

$$F(x,t) = \sum_{k=1}^{M} F_k(x)\cos(k\Omega t + \varphi_k),$$

где M — конечное число членов ряда; φ_k — медленно меняющаяся во времени фаза k-й гармоники. Наименьшая частота в спектре внешнего воздействия удовлетворяет условию $\omega/\Omega \ll 1$, где ω — собственная частота фрактального осциллятора (1).

Решение уравнения (1) ищется в виде $x(t) = X(t) + \sum\limits_{k=1}^{M}\mu_k\chi_k(t)$, где $X(t)$ и $\chi_k(t)$ меняются соответственно с характерными временами $\tau \sim 2\pi/\omega$ и $T_k \sim 2\pi/(\Omega k)$, а $\mu \sim \omega/(\Omega k) \ll 1$ для любых значений

$k \in \{1, M\}$. Подставляя $x(t)$ в (1), после усреднения за интервал времени T_k, имеем

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{T_t} X \approx -f(X, \alpha) + \sum\limits_{k=1}^{M} \left\langle \mu_k \chi_k \dfrac{\partial F_k(x)}{\partial x}\Big|_X \cos(k\Omega t + \varphi_k) \right\rangle \\ \mu_k D^{\alpha}_{T_t} \chi_k \approx -\mu_k \chi_k \left(\dfrac{\partial f(x, a)}{\partial x} \right)_X + F_k(X) \cos(k\Omega t + \varphi_k). \end{cases} \tag{3}$$

Принципиальное отличие фрактального осциллятора от нелинейного [3] состоит в том, что порядок малости членов уравнения (3) определяется не только их частотной зависимостью, но и зависимостью от дробного показателя α. Так, если нелинейная функция имеет вид $f(x, \alpha) = \omega^{\alpha} x^{n}$, где $n \in Z$, то условие малости слагаемого $\mu_k \chi_k (\partial f(x, \nu)/\partial x)_X$ по сравнению с остальными членами второго уравнения системы (3) запишется в виде

$$\frac{n\omega^{\alpha}}{\Omega^{\alpha}} \ll 1. \tag{4}$$

При этом членом $\mu_k \chi_k (\partial f(x, \nu)/\partial x)_X$ во втором уравнении системы (3) можно пренебречь.

Пренебрегая членом $\mu_k \chi_k (\partial f(x, \nu)/\partial x)_X$ во втором уравнении системы (3) и полагая $F_k = a_k F$, выразим из второго уравнения системы (3) χ_k и, подставляя полученное выражение в первое уравнение системы, окончательно имеем

$$D^{\alpha}_{T_t} X + \left[f(X, \alpha) - \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{M} \frac{\phi(a_k) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \varphi_k\right)}{\left(k\Omega + d\varphi_k/dt|_T\right)^{\alpha}} \right) F_X \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_X \right] = 0, \tag{5}$$

где $\phi(a_k)$ — функция от коэффициентов a_k, вид которой определяется числом M.

Важно отметить, что при $\alpha \to 2$ и $M = 1$ выражение (5) совпадает с результатом, полученным в работе [3].

В выражении (5) перед слагаемым, пропорциональным квадрату амплитуды внешних пульсаций, появился коэффициент, зависящий от

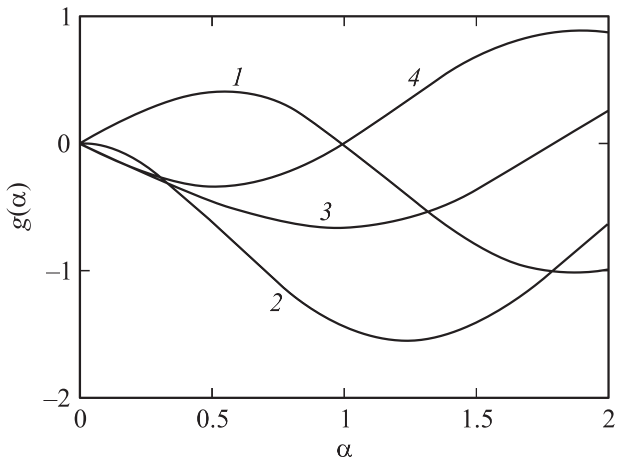

Рис. 1. Результаты численного моделирования выражения (6) при $\Omega = 1$; $\phi(a_k) = 1$: *1* — $M = 1$, $\varphi_k = 0$; *2* — $M = 3$, $\varphi_k = (\pi/4)\,k$; *3* — $M = 3$, $\varphi_k = (\pi/2)\,k$; *4* — $M = 3$, $\varphi_k = \pi k$.

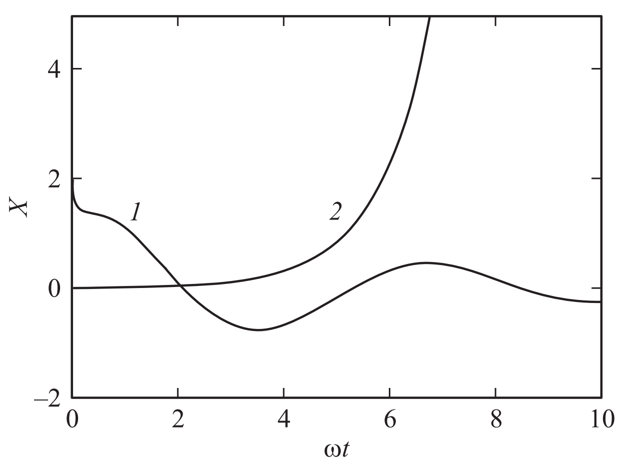

Рис. 2. Результаты численного решения уравнения (5) для частного случая (7): $\alpha = 1.8$; *1* — $g(\alpha) = -3$; *2* — $g(\alpha) = 3$.

показателя дробной степени α, а также Ω и φ_k:

$$g(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{M} \frac{\phi(a_k)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \varphi_k\right)}{\left(k\Omega + d\varphi_k/dt|_T\right)^{\alpha}}. \tag{6}$$

За счет выбора Ω и φ_k возможно обеспечить требуемое значение коэффициента $g(\alpha)$, что позволяет получить требуемый режим поведения фрактального осциллятора при известном виде нелинейностей $F(X)$, $f(X,\alpha)$. Для некоторых частных случаев внешнего гармонического воздействия результаты численного моделирования (6) приведены на рис. 1.

Для рассмотренных частных случаев рис. 1 величина $g(\alpha)$ является знакопеременной в зависимости от α и фазы φ_k внешнего воздействия при $\Omega = \text{const}$. Смена знака $g(\alpha)$ может привести к смене моды поведения с регулярной на хаотическую (или наоборот), в зависимости от вида нелинейности. Численное моделирование фрактального осциллятора (5) проводилось для частного случая:

$$f(X,\alpha) = \omega^{\alpha} X; \quad F_x \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_X = bX + b_1\psi(X); \quad \phi(a_k) = 1. \tag{7}$$

Результаты численного моделирования, представленные на рис. 2, при $b_1 \to 0$ и $b > 0$ показывают, что при смене знака $g(\alpha)$ происходит смена мод поведения фрактального осциллятора. Причем при $\alpha, \Omega = \text{const}$ и принятых в данной работе допущениях возможно выбрать параметры φ_k, b внешнего гармонического воздействия таким образом, чтобы обеспечить требуемый знак $g(\alpha)$ (рис. 2).

Таким образом:

— возвращающая сила в рассматриваемом нелинейном фрактальном осцилляторе (1) зависит не только от квадрата амплитуды внешних пульсаций, но и от знакопеременного сомножителя $g(\alpha)$.

— изменение знака $g(\alpha)$ может приводить к смене моды поведения фрактального осциллятора. Обеспечить требуемый знак коэффициента $g(\alpha)$ возможно за счет выбора параметров внешнего гармонического воздействия.

— обеспечить требуемую моду поведения фрактального осциллятора (1) при заданной величине $\alpha = \text{const}$ и принятых в данной работе допущениях возможно за счет предлагаемого в работе выбора параметров φ_k, b стабилизирующего внешнего гармонического воздействия.

Список литературы

[1] *Афанасьев В.В., Данилаев М.П., Польский Ю.Е.* // Сб. науч. тр. „Флуктуации и шумы в сложных системах живой и неживой природы“ / Отв. ред. Р.М. Юльметьев, А.В. Мокшин, С.А. Демин, М.Х. Салахов. Казань: РИЦ „Школа“, 2008. 456 с.
[2] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* Методы анализа, диагностики и управления поведением нелинейных устройств и систем с фрактальными процессами и хаотической динамикой. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2004. 219 с.
[3] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
[4] *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
[5] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.