06

Об эффективной проводимости композитных материалов

© *Ю.В. Корнюшин*

Maître Jean Brunschvig Research Unit, Chalet Shalva, Randogne,
CH-3975, Switzerland
E-mail: jacqie@bluewin.ch

Поступило в Редакцию 24 декабря 2009 г.

Обсуждаются композитные материалы, состоящие из хорошо проводящих волокон и плохо проводящей матрицы. Эффективная удельная проводимость рассматриваемой системы вычислена в приближении Клаузиуса–Моссотти. Полученные соотношения могут быть применены для вычисления удельной проводимости матрицы, используя экспериментально измеренные другие величины. Рассчитаны электрические поля в матрице и включениях. Показано, что поле в плохо проводящей матрице может значительно превосходить внешнее приложенное поле.

В однородном проводнике плотность электрического тока J равна произведению удельной электропроводности σ и напряженности электрического поля E [1]. В неоднородном проводнике усредненная по объему образца плотность электрического тока $\langle J \rangle$ равна произведению удельной эффективной электропроводности σ_e и усредненной по объему образца напряженности электрического поля $\langle E \rangle$, возникающего в результате равномерного приложения внешнего электрического поля (см., например, [2]). Задача о вычислении эффективной удельной электропроводности неоднородного образца является проблемой чрезвычайной математической сложности [2]. Приближение Клаузиуса–Моссотти успешно применяется в этой области. В [2] приближение Клазиуса–Моссотти применено, в частности, для моделирования эффективной удельной электропроводности образца, содержащего произвольное число эллипсоидальных проводящих включений одной и той же формы и ориентации в проводящей матрице. Предполагается также, что плотности тока и электрические поля в каждом включении и в матрице являются однородными, но они различны в различных типах включений и в матрице (кусочно-однородное приближение). В [2] получено, что

$$\sigma_e = \sigma_m \frac{1 - (1-n)\Sigma f_k(\sigma_m - \sigma_k)/[(1-n)\sigma_m + n\sigma_k]}{1 + n\Sigma f_k(\sigma_m - \sigma_k)/[(1-n)\sigma_m + n\sigma_k]}, \tag{1}$$

где σ_m — (эффективная) удельная электропроводность матрицы, n — фактор формы включения вдоль одной из главных осей. Этот фактор совпадает с фактором деполяризации [1,2]. В [2] рассматривались включения различных типов, имеющих различные электропроводности σ_k. В (1) f_k — это отношение объема включений типа k к объему образца (т.е. f_k — это объемная доля включений типа k).

Рассмотрим образец, содержащий включения одного типа. В этом случае из (1) следует, что

$$\sigma_e = \sigma_m \frac{f\sigma + (1-n)(1-f)\sigma_m + n(1-f)\sigma}{(1-n)\sigma_m + n\sigma - nf(\sigma - \sigma_m)}. \tag{2}$$

В случае, когда объемная доля включения f близка к 1 и проводимость матрицы σ_m существенно меньше проводимости включений σ, слагаемым $(1-n)(1-f)\sigma_m$ в числителе (2) можно пренебречь по сравнению со слагаемым $f\sigma$. В числителе (2) также можно пренебречь слагаемым $n(1-f)\sigma$. В знаменателе (2) можно пренебречь σ_m по сравнению с σ. В результате получаем

$$\sigma_e = f\sigma\sigma_m/[(1-n)\sigma_m + (1-f)n\sigma]. \tag{3}$$

Когда в знаменателе (3) можно пренебречь $(1-n)\sigma_m$ по сравнению с $(1-f)n\sigma$, из (3) следует, что

$$\sigma_e = f\sigma_m/(1-f)n. \tag{4}$$

Из (3) следует также, что

$$\sigma_m = (1-f)n\sigma\sigma_e/[f\sigma - (1-n)\sigma_e]. \tag{5}$$

Это уравнение можно использовать для вычисления σ_m из измеряемых величин σ, f, n и σ_e.

Теперь рассмотрим случай, когда включения являются проводящими волокнами в форме длинных цилиндров длиной l и диаметром d. Объемная доля включений в образце f предполагается близкой к 1.

Фактор деполяризации длинного цилиндра вдоль длинной оси можно считать приблизительно равным таковому сильно вытянутого сфероида с осями l и d. Для очень длинного вытянутого сфероида [3]

$$n = (d/l)^2\left[\ln(2l/d) - 1\right]. \tag{6}$$

Эта величина очень мала. В перпендикулярном к оси цилиндра направлении фактор деполяризации весьма близок к 0.5.

Из симметрии рассматриваемых объектов следует, что если изменить направление внешнего приложенного поля на 180°, направление тока также изменится на противоположное. Однако отношение измеряемого тока к внешнему полю останется неизменным. Из сказанного следует, что измеряемая эффективная электропроводность рассматриваемых объектов может быть только четной функцией внешнего приложенного поля.

Сейчас вычислим поля в матрице и включениях. Пусть E_m обозначает среднее поле в матрице и E_i обозначает среднее поле во включениях. Так как среднее поле в образце есть $\langle E\rangle$, мы имеем

$$\langle E\rangle = fE_i + (1-f)E_m. \tag{7}$$

В случае сверхпроводящих включений $E_i = 0$ и из (7) следует, что

$$E_m = \langle E\rangle/(1-f). \tag{8}$$

Именно это поле действует на включения. В случае близких к единице f величина E_m значительно превосходит $\langle E\rangle$.

Для того чтобы рассчитать упомянутые поля в приближении Клазиуса–Моссотти, необходимо еще одно соотношение:

$$\langle J\rangle = \sigma_e\langle E\rangle = f\sigma E_i + (1-f)\sigma_m E_m. \tag{9}$$

Из уравнений (7) и (9) следует, что при произвольной величине фактора заполнения f:

$$E_m = (\sigma\langle E\rangle - \langle J\rangle)/[(1-f)(\sigma - \sigma_m)], \tag{10}$$

$$E_i = (\langle J\rangle - \sigma_m\langle E\rangle)/[f(\sigma - \sigma_m)]. \tag{11}$$

Из (5), (9) и (10) следует, что

$$E_m = \{(\sigma - \sigma_e)[f\sigma - (1-n)\sigma_e]/\sigma(1-f)(f\sigma - \sigma_e + fn\sigma_e)\}\langle E\rangle, \tag{12}$$

$$E_i = \{\sigma_e[f\sigma - (1-f)n\sigma - (1-n)\sigma_e]/f\sigma(f\sigma - \sigma_e + fn\sigma_e)\}\langle E\rangle. \quad (13)$$

Уравнения $(12), (13)$ применимы в случае, когда объемная доля включений f близка к единице.

Так как E_m является полем, действующим на включения, зависимость σ_m от электрического поля должна быть представлена как $\sigma_m = \sigma_m(E_m)$.

В заключение автор благодарит Е.Б. Гордона из Института проблем химической физики РАН в Черноголовке за то, что он привлек его внимание к интересной задаче, изложенной в настоящей статье.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1965.
[2] *Kornyushin Y.* // Ceramics International. 2007. V. 29. P. 333.
[3] *Osborn J.A.* // Phys. Rev. 1945. V. 64. P. 352.