01;03

# Равновесная конфигурация поверхности проводящей жидкости во внешнем пространственно-периодическом электрическом поле

© Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева

Институт электрофизики УРО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

*Поступило в Редакцию 22 октября 2009 г.*

Рассмотрена задача о возможных равновесных конфигурациях свободной поверхности проводящей жидкости во внешнем пространственно-периодическом электрическом поле. Показано, что при одинаковых условиях задача может допускать решения с различной длиной волны: соответствующей периоду электрического поля, и вдвое меньшей, соответствующей периоду электростатического давления. Для первого случая найдено точное частное решение для профиля поверхности, учитывающее влияние капиллярных сил.

Поверхность проводящей жидкости деформируется под действием внешнего электрического поля [1]. Геометрия формирующихся структур определяется из условия взаимной компенсации электростатических и капиллярных сил. Известно коническое решение Тейлора [2], для которого баланс сил реализуется всюду, за исключением особой точки — вершины конуса. В случае однородного внешнего электрического поля было найдено однопараметрическое семейство точных решений для равновесных конфигураций поверхности, соответствующее плоской геометрии задачи [3,4].

В настоящей работе мы рассмотрим поверхность проводящей жидкости, находящуюся во внешнем пространственно-периодическом электрическом поле с волновым числом $k$. Без электрического поля равновесной конфигурацией поверхности является плоскость. При наличии внешнего поля на плоской границе жидкости возникает разность давлений, которой соответствует волновое число $2k$ (электростатическое давление пропорционально квадрату напряженности электрического поля). Поверхность жидкости будет искривляться, в результате чего образуется периодическая структура с длиной волны $\pi/k$. Ниже мы продемострируем, что возможно также формирование структуры с вдвое большей длиной волны $2\pi/k$. Примечательно, что решения с различными периодами существуют при идентичных условиях.

Выпишем уравнения, описывающие стационарные конфигурации поверхности проводящей жидкости в электрическом поле с учетом сил поверхностного натяжения. Будем рассматривать эту задачу в плоской геометрии, когда все величины зависят лишь от пары переменных $x$ и $y$. Считаем, что ось $y$ прямоугольной системы координат направлена по нормали к невозмущенной поверхности, а ось $x$ направлена вдоль поверхности в направлении волнового вектора внешнего поля. Распределение потенциала электрического поля $\Phi$ задается двумерным уравнением Лапласа:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.$$

Его следует решать совместно с условием эквипотенциальности свободной поверхности жидкости, $\Phi = 0$, а также условием бесконечности:

$$\Phi \to U e^{ky} \sin(kx), \qquad y \to \infty. \tag{1}$$

Для плоской поверхности было бы: $\Phi = 2U\mathrm{sh}(ky)\sin(kx)$, откуда следует, что $U$ имеет смысл характерного значения потенциала электрического поля на расстоянии порядка $k^{-1}$ от поверхности.

Равновесная форма свободной поверхности жидкости определяется условием баланса электростатических и капиллярных давлений:

$$(8\pi)^{-1}(\nabla\Phi)^2 + T\kappa + P = 0. \tag{2}$$

Здесь $T$ — коэффициент поверхностного натяжения, $\kappa$ — кривизна поверхности, а $P$ — разность давлений внутри и вне жидкости.

Перейдем к безразмерным обозначениям посредством замен:

$$x \to x/k, \quad y \to y/k, \quad \Phi \to \phi U, \quad P \to pTk.$$

Введем в рассмотрение комплексный потенциал электрического поля $W = \varphi - i\psi$, который является аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Функция $\psi$ является гармонически сопряженной к потенциалу электрического поля $\phi$; условие $\psi = \mathrm{const}$ задает силовые линии поля. Как следует из (1), потенциал $W$ удовлетворяет условию $W \to ie^{-iz}$ при $y \to \infty$. Условие баланса сил на свободной поверхности жидкости (2) перепишется в следующем виде:

$$2^{-1}A|W_z|^2 + \kappa + p = 0, \tag{3}$$

где $A \equiv (U^2k)/(4\pi T)$ — безразмерный комплекс, играющий роль внешнего управляющего параметра (он характеризует приложенное электрическое поле).

Далее, осуществим конформное преобразование $z = z(w)$ области над свободной поверхностью жидкости в верхнюю полуплоскость комплексной переменной $w = u + iv$. В новых переменных граница жидкости представляет собой прямую $v = 0$, и задача нахождения комплексного потенциала поля может быть легко решена:

$$W(w) = 2i\,\mathrm{ch}(iw). \tag{4}$$

Форма свободной поверхности будет определяться параметрическим выражением: $z = Z(u) \equiv z(w)|_{v=0}$. Ее кривизна задается формулой:

$$k = |Z_u|^{-3}\mathrm{Im}(Z_{uu}\bar{Z}_u).$$

Удобно ввести вспомогательную функцию $G(u)$, связанную с $Z(u)$ соотношением $Z_u = G^2$. Условие баланса сил (3) перепишется в виде:

$$A(1 - \cos 2u) = i(\bar{G}G_u - G\bar{G}_u) - p(G\bar{G})^2, \tag{5}$$

где мы воспользовались решением для распределения поля (4).

В итоге задача о нахождении стационарного профиля поверхности жидкости свелась к нахождению аналитической функции $z = z(w)$, которая обеспечивала бы выполнение условия (5) на свободной поверхности, а также условия $z \to w$ при $v \to \infty$.

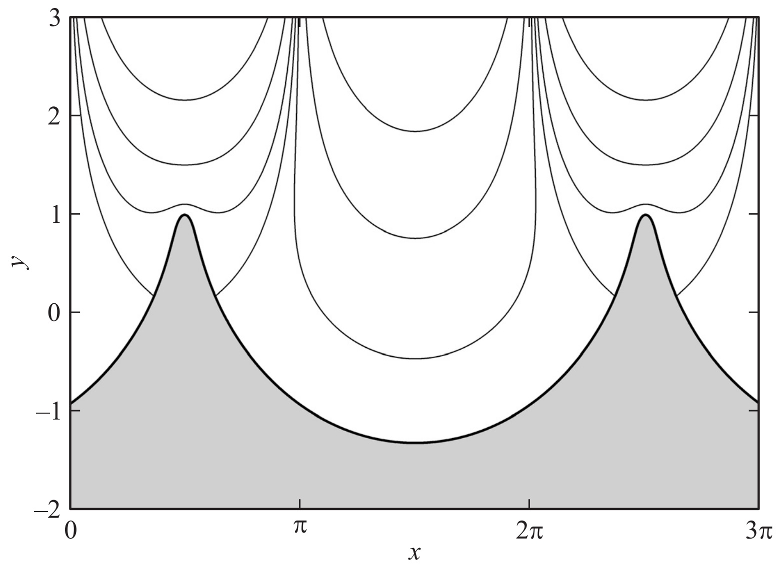
Будем искать решения ключевого уравнения (5) в виде

$$G(u) = 1 + iae^{iu}, \tag{6}$$

что соответствует отображению

$$z(w) = w + 2ae^{iw} + 2^{-1}ia^2e^{2iw},$$

удовлетворяющему необходимым условиям на бесконечности.




Представлена равновесная конфигурация поверхности проводящей жидкости. Также приведено семейство эквипотенциалей $\varphi = 0, \pm 0.1, \pm 0.35, \pm 0.9$.

Подставляя (6) в (5) и затем приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в получившемся выражении, находим: $a = 1/\sqrt{3}$, $p = -3/8$ и $A = 1/4$. Форму свободной поверхности, соответствующую найденному точному частному решению, можно найти интегрированием соотношения $Z_u = G^2$:

$$Z(u) = u + \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{iu} + \frac{i}{6}\, e^{2iu}.$$

Описываемая этим выражением равновесная форма поверхности, а также характерные эквипотенциальные поверхности изображены на рисунке. Отметим, что прямым $u = n\pi$ в конформных переменных соответствуют эквипотенциали $\phi = 0$, пересекающиеся с гарницей жидкости. Это — сепаратрисы, отделяющие области с различными направлениями электрического поля.

Итак, помимо решений с периодом (в безразмерных обозначениях) $\pi$, существование которых очевидно, задача допускает также решения с вдвое большим периодом $2\pi$. Покажем, что эти решения реализуются при одинаковых условиях, т. е. при одинаковых значениях параметра $A$.

Пусть внешнее электрическое поле мало, т. е. $A \ll 1$, и поверхность близка к плоской. Будем искать решение разложением по малому параметру $A$. Учитывая члены вплоть до кубических, получим:

$$G(u) = 1 + \left(\frac{A}{4} + \frac{A^2}{4} + \frac{5A^3}{16}\right) e^{2iu} + \frac{A^3}{64} e^{4iu} + \dots, \tag{7}$$

$$p = -A - A^2/4 - A^3/4 + \dots,$$

т. е. в пределе слабого поля могут существовать лишь решения с равным $\pi$ периодом, определяемым электростатическим давлением. Выражение (7) с достаточно высокой точностью описывает равновесные конфигурации поверхности при конечных значениях параметра $A$, в частности, при $A = 1/4$, что соответствует условию существования решения (6). Для точного решения (6) отношение амплитуды возмущения поверхности к длине волны равно 0.184. Для приближенного решения (7) при том же значении параметра $A$ аналогичное отношение составляет примерно 0.026, т. е. характерные углы наклона оказываются меньшими почти на порядок.

Таким образом, анализ условий баланса сил на свободной поверхности проводящей жидкости, деформируемой пространственно-периодическим электрическим полем с волновым числом $k$, показал, что при одинаковых условиях имеются стационарные решения для формы границы с волновыми числами $k$ и $2k$. Для первого случая найдено точное частное решение, соответствующее возмущению поверхности с относительно большой амплитудой. Какая именно структура реализуется, определяется устойчивостью решений, анализ которой выходит за рамки настоящей работы.

Отметим, что полученные решения применимы для описания стационарного профиля поверхности идеальной несжимаемой жидкости, деформируемой периодическим потенциальным течением. Это связано с тем, что указанные задачи эквивалентны с математичсекой точки зрения (см., например, работы [4–6]).

Данная работа выполнена при поддержке фонда „Династия“ в рамках Целевой программы поддержки междисциплинарных проектов УрО РАН и СО РАН и Программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“.

## Список литературы

[1] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. В. 4. С. 347.
[2] *Taylor G.I.* // Proc R. Soc. London A. 1964. V. 280. P. 383.
[3] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 22. С. 79.
[4] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. В. 6 (12). С. 1990.
[5] *Blyth M.G., Vandern-Broeck J.-M.* // SIAM J. Appl. Math. 2005. V. 66. N 1. P. 174.
[6] *Zubarev N.M., Zubareva O.V.* // Phys. Fluids. 2007. V. 19. P. 102110.