09

Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации

© *М.О. Журавлев, М.К. Куровская, О.И. Москаленко*

ГОУ ВПО „Саратовский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского“
E-mail: pifos@bk.ru, mc@nonlin.sgu.ru, moskalenko@nonlin.sgu.ru

Поступило в Редакцию 18 декабря 2009 г.

Предложен новый метод для выделения турбулентных и ламинарных фаз временны́х реализаций связанных хаотических систем, находящихся вблизи границы режима фазовой синхронизации. Данный метод позволяет определять продолжительность фаз, что, в свою очередь, дает возможность проанализировать статистические характеристики поведения систем. Предложенный метод использует непосредственно мгновенные фазы хаотических сигналов систем и позволяет точно определять длину турбулентной и ламинарной фазы поведения. Для верификации корректности работы предложенного метода полученные данные сопоставлены с ранее известными результатами, показано их хорошее соответствие.

В последнее время все больше внимания уделяется изучению перемежаемости [1–4]. В исследованиях данного типа поведения большую роль играют статистические характеристики перемежающегося поведения, такие как распределение длин ламинарных и турбулентных фаз в зависимости от управляющих параметров изучаемой системы, зависимость средней длительности ламинарной фазы от параметра надкритичности. Для нахождения данных характеристик используются различные методы выделения участков синхронного и асинхронного поведения. Как правило, данные методы используют различные преобразования временно́й реализации, например непрерывное вейвлетное преобразование [5,6]. Это позволяет достаточно точно выделять участки синхронного и асинхронного поведения, но общим недостатком этих методов является сильное увеличение времени счета, особенно на длительных временны́х реализациях. В то же самое время именно длительные временны́е реализации необходимы для анализа статистических характеристик перемежающегося поведения.

Одним из важных и интересных типов перемежающегося поведения является так называемая перемежаемость „игольного ушка“ [3,4,7], наблюдаемая вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. В данной работе предложен новый метод для выделения участков синхронного и асинхронного поведения для данного типа перемежаемости. Достоинством данного метода является то, что он работает непосредственно с разностью мгновенных фаз и не использует дополнительных преобразований, что значительно уменьшает продолжительность времени расчета. Апробация предложенного метода проведена на примере системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера [8].

Модельная система однонаправленных связанных осцилляторов Ресслера имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a u_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c). \end{aligned} \tag{2}$$

Система (1) является ведущей, а система (2) — ведомой. Связь между системами является диссипативной, величину связи определяет параметр ε. Значения управляющих параметров выбраны следующими: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$. Параметры $\omega_d = 0.93$ и $\omega_r = 0.95$ отвечают собственным частотам ведущей и ведомой подсистем соответственно.

Фазовая хаотическая синхронизация соответствует случаю, когда разность мгновенных фаз

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \tag{3}$$

для исследуемых взаимодействующих хаотических систем оказывается ограниченной и не нарастает с течением времени:

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \text{const}, \tag{4}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — мгновенные фазы рассматриваемых хаотических систем соответственно. Фазы $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ могут быть введены в рассмотрение различными способами, такими как угол поворота на плоскости проекции хаотического аттрактора, с помощью сечения Пуанкаре или преобразования Гильберта [9,10].

Установлению синхронного режима в связанных хаотических системах, при выборе значений управляющих параметров вблизи области (но вне ее) фазовой синхронизации, предшествует перемежающееся поведение, когда во временнóй реализации существуют участки синхронной динамики (ламинарные фазы), прерывающиеся внезапными проскоками (турбулентные фазы), во время которых значение разности фаз изменяется на величину 2π.

При введении фазы хаотического сигнала одним из вышеупомянутых традиционных способов ее считают монотонно возрастающей от $-\infty$ до $+\infty$. Для выявления участков синхронного/асинхронного поведения обычно рассматривают зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ от времени. Типичная зависимость такой разности фаз для двух однонаправлено связанных систем Ресслера (1)–(2) представлена на рис. 1, *a*. Участки, где разность фаз $\Delta\varphi(t)$ изменяется в пределах 2π, соответствуют ламинарному поведению, когда наблюдается захват фазы. Остальные участки соответствуют турбулентному поведению, где захват фазы не наблюдается.

Несмотря на то что участки ламинарного и турбулентного поведения на временнóй зависимости $\Delta\varphi(t)$ легко определяются визуально, при численном выделении этих фаз возникает ряд проблем, связанных с хаотическими флуктуациями, которые приводят к ложному детектированию возникновения ламинарных или турбулентных фаз.

Для того чтобы избавиться от сложностей, которые возникают при численном выделении участков турбулентного и ламинарного поведения, будем считать мгновенные фазы $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ не монотонно возрастающими от $-\infty$ до $+\infty$, а лежащими в пределах $[0; 2\pi]$. В этом случае разность фаз $\Delta\varphi(t)$ будет изменяться в диапазоне $[-2\pi; 2\pi]$ и иметь вид, показанный на рис. 1, *b*.

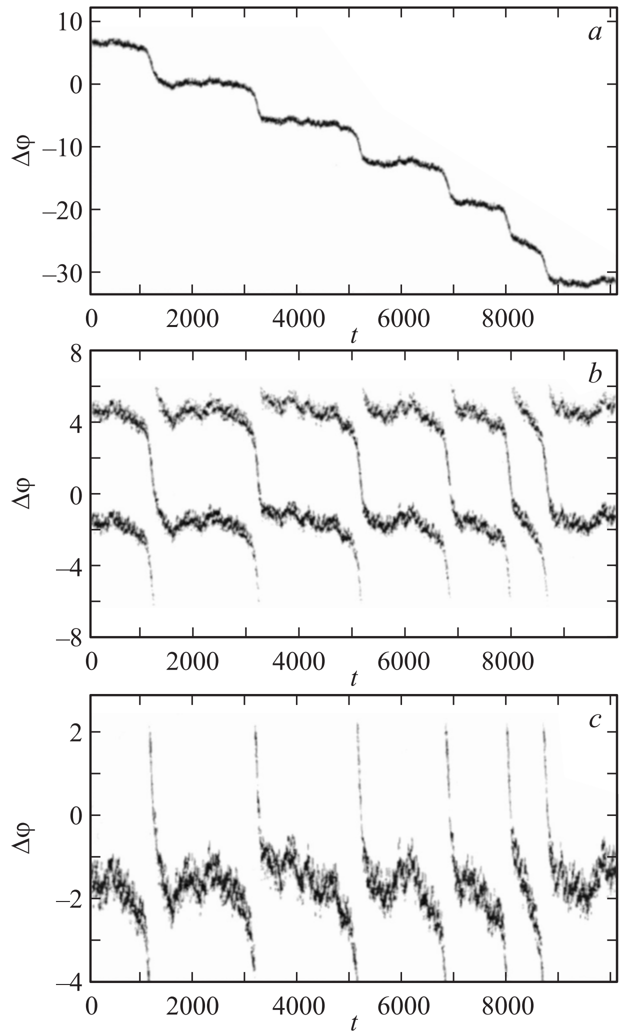

Рис. 1. Разности фаз $\Delta\varphi(t)$ для следующих случаев: a — мгновенные фазы монотонно возрастают от $-\infty$ до $+\infty$; b — мгновенные фазы лежат в диапазоне $[-2\pi; 2\pi]$; c — диапазон изменения разности мгновенных фаз составляет 2π. Параметр связи во всех случаях выбран равным $\varepsilon = 0.036$.

Из сопоставления рис. 1, a и b видно, что на рис. 1, b существует некоторый диапазон значений разности фаз $[\Delta\varphi_{\min}, \Delta\varphi_{\max}]$ (в рассматриваемом случае $\Delta\varphi_{\min} \approx -\pi$, $\Delta\varphi_{\max} \approx 2\pi$), выход значения $\Delta\varphi$ за пределы которого соответствует началу турбулентной фазы. При этом важно отметить, что все флуктуации величины $\Delta\varphi(t)$, обусловленные хаотическим характером колебаний взаимодействующих систем, оказываются локализованными в обалсти ламинарных участков поведения систем, в то время как изменение разности фаз во время турбулентной фазы практически не демонстрирует флуктуаций. Это позволяет во время численного анализа временны́х реализаций однозначно и очень точно диагностировать начало и конец турбулентной фазы по значению величины $\Delta\varphi(t)$.

Очевидно, что если величины $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ изменяются в диапазоне $[0; 2\pi]$, то разность фаз $\Delta\varphi(t)$ будет лежать в интервале $[-2\pi; 2\pi]$. При этом зависимость $\Delta\varphi(t)$ будет являться многозначной, что не очень удобно для анализа поведения изучаемых систем. Чтобы избавиться от этого недостатка метода, можно использовать факт 2π-периодичности фазы и перевести величину разности фаз из диапазона значений шириной 4π к аналогичному диапазону шириной 2π. При этом нужно стремиться к тому, чтобы значения разности фаз, соответствующие ламинарному участку поведения системы, приходились примерно на середину диапазона значений (рис. 1, c). В этом случае диагностировать начало и конец учатска турбулентной динамики можно по пересечению величиной $\Delta\varphi(t)$ некоторых установленных пороговых значений $\Delta\varphi_{\min}$ и $\Delta\varphi_{\max}$ (в рассматриваемом случае $\Delta\varphi_{\min} \approx -3$, $\Delta\varphi_{\max} \approx 0$). Важно отметить, что и в этом случае все флуктуации, обычно препятствующие точному детектированию начала и конца ламинарных и турбулентных фаз, оказываются сосредоточенными в области значений $[\Delta\varphi_{\min}, \Delta\varphi_{\max}]$, соответствующей ламинарному характеру поведения систем, что позволяет избавиться от сложностей нахождения границ участков синхронной и асинхронной динамики.

Важно еще раз подчеркнуть, что используемый подход опираетя непосредственно на мгновенные фазы, что позволяет не использовать дополнительные преобразования (такие как усреднение по скользящему окну, непрерывное вейвлетное преобразование и т.п.) для разности фаз $\Delta\varphi(t)$, которые, в свою очередь, могут значительно увеличить время вычислений.

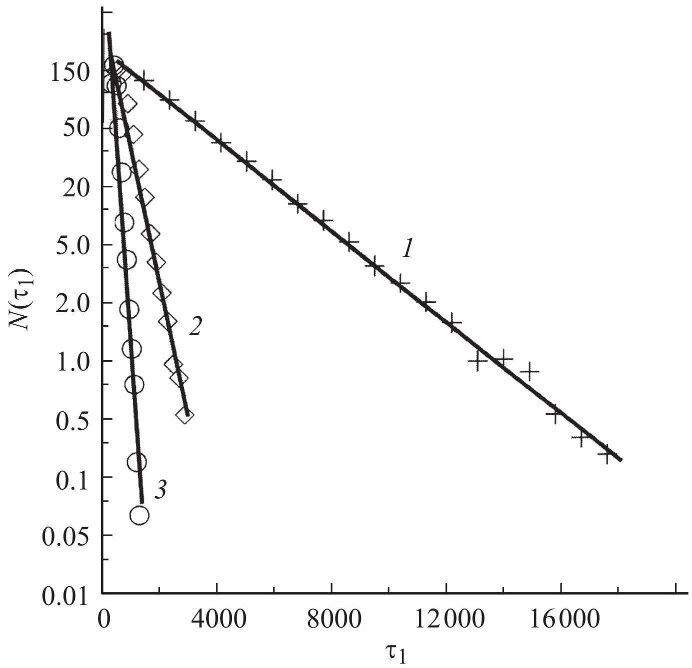

Рис. 2. Распределения длительностей ламинарных фаз $N(\tau_1)$ при различных значениях параметра связи и соответствующие аппроксимации (показаны сплошными линиями): *1* — $\varepsilon = 0.036\,(+)$, $N(\tau_1) = 213.6\exp(-4\cdot 10^{-4}\tau_1)$; *2* — $\varepsilon = 0.032\,(\diamond)$, $N(\tau_1) = 368.8\exp(-2\cdot 10^{-3}\tau_1)$; *3* — $\varepsilon = 0.028\,(\bigcirc)$, $N(\tau_1) = 1211.3\exp(-7\cdot 10^{-3}\tau_1)$. Ось ординат приведена в логарифмическом масштабе.

Для верификации предложенного метода были получены распределения длительностей ламинарных фаз для системы (1)–(2) при различных значениях параметра связи ε (рис. 2). Из приведенных рисунков отчетливо видно, что распределение длительностей ламинарных фаз, выделенных предложенным методом, подчиняется экспоненциальному закону, в полном соответствии с известной закономерностью, приведенной в работах [2,7].

Предложенный метод применен также для выделения турбулентных фаз для системы (1)–(2) при тех же значениях параметра связи.

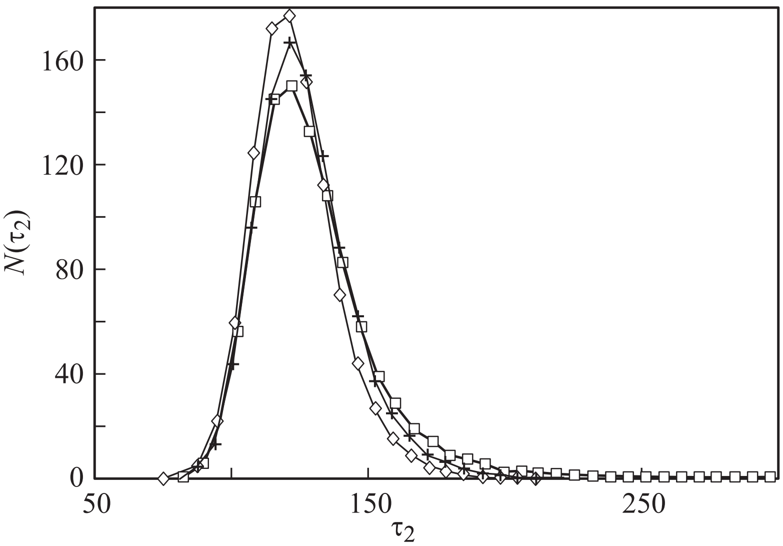

Рис. 3. Распределения длительностей турбулентных фаз $N(\tau_2)$ при различных значениях параметра связи: $\varepsilon = 0.036$ (□); $\varepsilon = 0.032$ (+); $\varepsilon = 0.028$ (◇). Видно, что во всех случаях распределения оказываются близкими к гауссовым.

Полученные распределения приведены на рис. 3. Видно, что во всех рассмотренных случаях распределения длительностей турбулентных фаз оказываются близкими к гауссовым.

Таким образом, в настоящей работе предложен новый метод для выделения турбулентных и ламинарных фаз во временны́х реализациях взаимодействующих осцилляторов, находящихся вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. Предложенный метод не требует дополнительных преобразований анализруемых величин, что позволяет существенно упростить и ускорить процедуру выделения ламинарных и турбулентных участков поведения анализируемых систем. Результаты, полученные с помощью предложенного метода, находятся в очень хорошем соответствии с теоретическими оценками.

Работа выполнена при поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 годы.

Список литературы

[1] *Москаленко О.И.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 19. С. 72–79.
[2] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Ovchinnikov A.A., Bocaletti S.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. N 2. P. 026206.
[3] *Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 79. P. 47.
[4] *Pikovsky A., Zaks M., Rosenblum M., Osipov G., Kurths J.* // Chaos. 1997. V. 7. P. 680–687.
[5] *Hramov A.E.* et al. // Chaos. 2006. V. 16. P. 043111.
[6] *Короновский А.А., Тыщенко А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 1. С. 1–8.
[7] *Куровская М.К.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 24. С. 48–54.
[8] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 036205.
[9] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. N 10. P. 2291–2305.
[10] *Pikovsky A., Rosenblum M., Osipov G., Kurths J.* // Physica D. 1997. V. 104. N 4. P. 219–238.