

09

Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов

© А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Л.В. Тюрюкина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru

Поступило в Редакцию 9 ноября 2009 г.

В фазовом приближении исследуется синхронизация внешней силой осцилляторов, совершающих квазипериодические колебания. Представлены ляпуновские карты, обсуждаются возможные типы режимов. Выявлены и классифицированы различные типы двухчастотных торов.

Квазипериодические колебания являются одним из фундаментальных типов поведения динамических систем. Они встречаются во многих нелинейных системах в природе и технике [1–3]. В общем случае это колебания, содержащие в спектре две или более дискретных составляющих, характеризующихся несоизмеримыми частотами. В фазовом пространстве образом квазипериодического движения служит аттрактор в виде тора, размерность которого определяется количеством основных несоизмеримых частотных компонент. Простейшей ситуацией, связанной с рождением квазипериодических колебаний, является задача о динамике двух диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов (автогенераторов). При сильной связи осцилляторы демонстрируют режим взаимного захвата частот. При уменьшении связи возникает режим биений, или квазипериодических колебаний [1,2]. Задача о синхронизации таких осцилляторов внешней силой оказывается сложной. В настоящее время проблема синхронизации квазипериодических колебаний прояснена в гораздо меньшей степени, чем синхронизация регулярных и даже хаотических режимов. В последнее время выявлен целый ряд новых аспектов такой задачи [4–7]. Существенный прогресс в понимании картины возникает с использованием уравнения для динамики фаз осцилляторов. В [6,7] в рамках фазового приближения установлены важные особенности устройства плоскости

параметров частота–амплитуда воздействия. Найдены область захвата фаз осцилляторов внешней силой, области двух- и трехчастотных квазипериодических режимов. Указано, что границей между последними являются линии седло-узловых бифуркаций устойчивой и неустойчивых инвариантных кривых, что отвечает аналогичной бифуркации торов в исходной системе. Однако был рассмотрен только режим, когда автономные осцилляторы демонстрируют взаимную синхронизацию (резонансный цикл на торе). В настоящей работе мы обсудим, как происходит синхронизация при переходе автономных осцилляторов из режима захвата в квазипериодический режим. С этой целью мы применим метод карт ляпуновских показателей, который оказывается весьма эффективным для данного круга задач.

Исходная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(x - y) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(y - x) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ — параметр отрицательного трения автономных осцилляторов, Δ — их относительная частотная расстройка, μ — коэффициент диссипативной связи, B — амплитуда воздействия, а $\omega = 1 + \Omega$ — его частота. Центральная частота осцилляторов принята за единицу.

Представим динамические переменные в виде [3]

$$x = a e^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t}, \quad y = b e^{i\omega t} + b^* e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — медленные комплексные амплитуды осцилляторов. Наложим стандартные для метода медленно меняющихся амплитуд дополнительные условия [3]

$$\dot{a} e^{i\omega t} + \dot{a}^* e^{-i\omega t} = 0, \quad \dot{b} e^{i\omega t} + \dot{b}^* e^{-i\omega t} = 0. \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в уравнения (1), умножим полученные выражения на $e^{-i\omega t}$ и проведем усреднение. После соответствующих преобразований получаем укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - 2i \left(\Omega + \frac{\Delta}{4} \right) a - \mu(a - b) - \frac{B}{4}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b - 2i \left(\Omega - \frac{\Delta}{4} \right) b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь параметр λ может быть убран перенормировкой. Положим далее $a = Re^{i\psi_1}$ и $b = re^{i\psi_2}$, где R , r и $\psi_{1,2}$ — действительные амплитуды и фазы осцилляторов относительно внешнего сигнала. В полученных уравнениях для фаз осцилляторов вслед за [1,2] считаем, что они движутся в окрестности стационарных орбит $R = r = 1$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\frac{\Delta}{4} - \Omega + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1) + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta}{4} - \Omega + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2),\end{aligned}\quad (5)$$

где $b = B/4$. Это и есть фазовые уравнения возбуждаемых связанных осцилляторов [6,7].

Если осцилляторы не связаны и $\mu = 0$, то система (5) распадается на классическое фазовое уравнение синхронизации изолированного первого осциллятора [1,3] и уравнение свободных колебаний второго. Если отсутствует внешнее возбуждение, то, вводя относительную фазу осцилляторов $\theta = \psi_1 - \psi_2$, получаем классическое уравнение Адлера для двух диссипативно связанных осцилляторов $\dot{\theta} = -\Delta/2 - \mu \sin \theta$ [1,2]. Оно описывает возможность захвата относительной фазы осцилляторов при $|\Delta| < 2\mu$ и режима биений при $|\Delta| > 2\mu$.

В уравнениях (5) условие точного захвата фаз $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$ приводит к

$$-2\Omega + b \sin \psi_1 = 0, \quad \frac{\Delta}{4} - \Omega + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2) = 0. \quad (6)$$

Отсюда легко получаем уравнения границ области синхронизации:

$$b = \pm 2\Omega, \quad \Omega = \frac{\Delta}{4} \pm \frac{\mu}{2}. \quad (7)$$

Перейдем к обсуждению устройства плоскости частота–амплитуда воздействия. На рис. 1, *a-c* показаны полученные численно плоскости параметров (Ω, b) . При этом рис. 1, *a* отвечает случаю, когда автономные осцилляторы захвачены, рис. 1, *b* — пороговой ситуации $\Delta = 2\mu$, а рис. 1, *c* — когда они совершают квазипериодические колебания.

Следует сказать несколько слов о „технике“ построения рис. 1, поскольку она отлична от использованной в [6,7]. Мы вычисляли оба ляпуновских показателя системы (5) Λ_1, Λ_2 в каждой точке плоскости

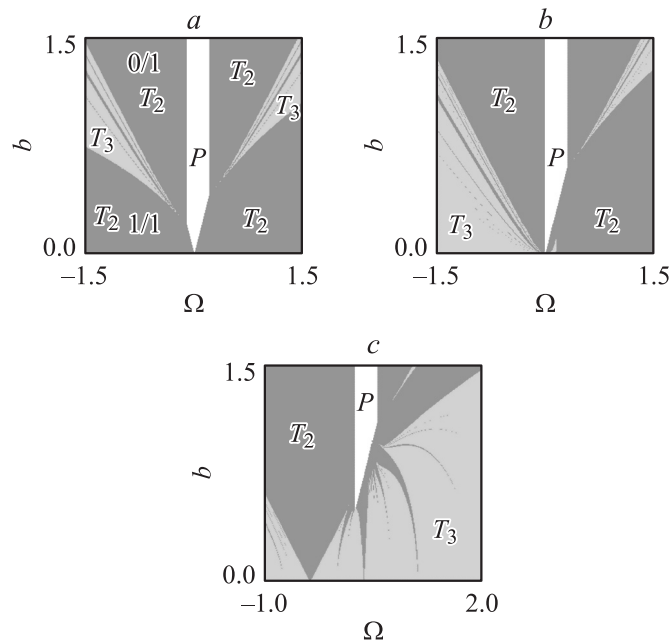


Рис. 1. Ляпуновские карты системы (5) для случаев: *a* — режим захвата автономных осцилляторов $\Delta < 2\mu$, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.2$; *b* — пороговая ситуация $\Delta = 2\mu$, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.6$; *c* — режим квазипериодических колебаний автономных осцилляторов $\Delta > 2\mu$, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$. На картах используются следующие обозначения: *P* — область захвата фаз, T_2 — область двухчастотных торов, T_3 — область трехчастотных торов.

параметров. Затем эта плоскость окрашивалась в соответствии с величиной показателей, так чтобы визуализировать следующие режимы:

а) *P* — наличие устойчивой неподвижной точки (захват фаз), $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$;

б) T_2 — квазипериодический режим, отвечающий двухчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$;

в) T_3 — квазипериодический режим, отвечающий трехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$.

При этом отпадает необходимость в поиске линий бифуркаций инвариантных кривых, которая ответственна за переход от двухчастотного

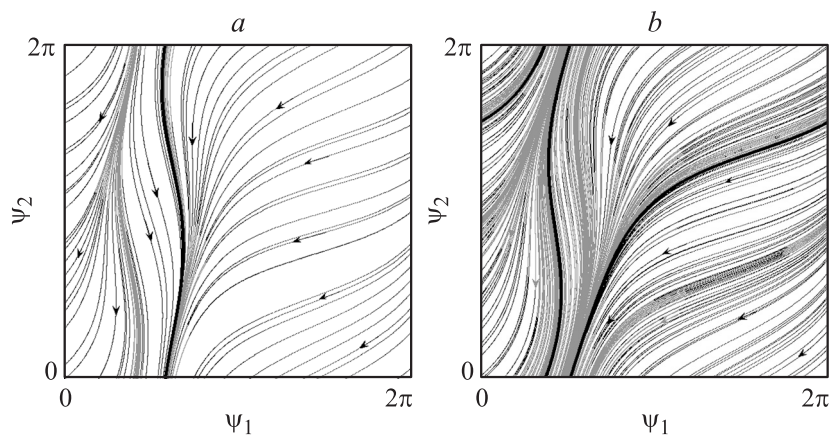


Рис. 2. Фазовые портреты системы (5): a — инвариантная кривая, отвечающая частичному захвату фазы первого осциллятора $\mu = 0.3$, $\Delta = 0.2$, $\Omega = 0.75$ и $b = 0.9$ ($w = 0/1$); b — резонансный двухчастотный тор $\mu = 0.3$, $\Delta = 0.2$, $\Omega = 0.75$ и $b = 0.79$ ($w = 1/2$).

тора к трехчастотному. Это упрощает анализ, поскольку общая картина режимов получается „автоматически“, и не требуется никакая дополнительная информация о положении линий бифуркаций инвариантных кривых и усилий по их поиску. Это позволяет, как мы увидим, легко находить и новые режимы.

На рис. 1, a область периодических режимов P имеет вид языка синхронизации. Его острие задается первым условием (7). Вершина острия отвечает частоте $\Omega = 0$, т. е. точно центральной частоте автономных осцилляторов. Второе условие (7) дает боковые границы языка и определяет частотную ширину полосы захвата связанных осцилляторов. Центр ее лежит на собственной частоте второго осциллятора $\Omega_2 = \Delta/4$, а ширина равна константе связи μ . На фазовой плоскости (ψ_1, ψ_2) в области P притягивающей является единственная устойчивая неподвижная точка. В областях T_2 притягивающей является инвариантная кривая (двухчастотный тор) (рис. 2, a). В области T_3 реализуется поток фазовых траекторий, и притягивающего объекта нет. На плоскости параметров сигнала имеются характерные точки пересечения линий (7), в которых сходятся области двухчастотных, трехчастотных торов и

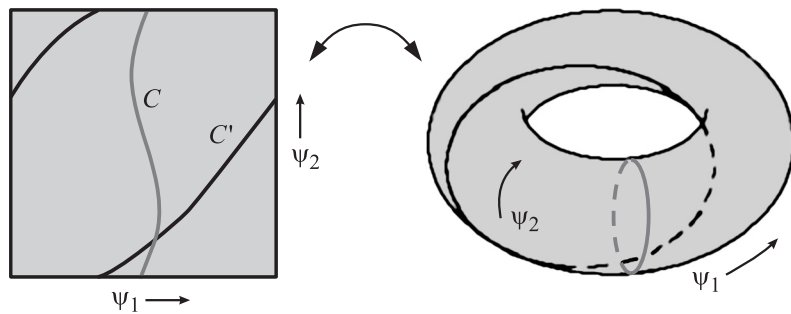


Рис. 3. Качественная картина замыкания плоскости фазовых переменных (ψ_1, ψ_2) в тор. Показаны инвариантные кривые C и C' , отвечающие простейшим двухчастотным торам с числами вращения $0/1$ и $1/1$.

периодических режимов. Мы будем называть их точками рождения торов¹.

Метод ляпуновских карт выявляет и другие режимы системы (5). Внутри области T_3 видны узкие полосы, в которых реализуются другие варианты двухчастотных торов. Фазовый портрет простейшего из них показан на рис. 2, *b*. Различные типы двухчастотных торов можно классифицировать следующим образом. Фазовое пространство системы (5) может быть периодически продолжено с периодом 2π по каждой переменной. Это можно проиллюстрировать, трансформируя фазовый квадрат в тор, „склеивая“ его дважды, как показано на рис. 3 [8]. Тогда инвариантные кривые превращаются в замкнутые орбиты на поверхности „тора фаз“. Каждой из них можно приписать число вращения $w = p/q$, где p — число оборотов по параллели, а q — по меридиану. Простейшие двухчастотные торы имеют числа вращения $0/1$ и $1/1$. В первом случае реализуется режим частичного захвата фазы первого осциллятора, а во втором — частичного захвата относительной фазы. Они также обозначены на рис. 1, *a*. Тор на рис. 2, *b* является примером более сложного резонансного двухчастотного тора с числом вращения $w = 1/2$.

¹ С позиций теории бифуркаций в указанных точках сходятся две линии седло-узловых бифуркаций неподвижных точек (7) и две линии седло-узловых бифуркаций инвариантных кривых [6,7].

Будем теперь постепенно увеличивать частотную расстройку осцилляторов Δ . При этом будет наблюдаться переход от режима захвата автономных осцилляторов к режиму их квазипериодических колебаний. Ляпуновская карта для порогового значения $\Delta = 2\mu$ показана на рис. 1, *b*. Сравнивая его с рис. 1, *a*, заключаем, что произошли заметные изменения. Левая точка рождения торов „влипает“ в основание (острие) языка синхронизации. Таким образом, возникла новая ситуация коразмерности три. Теперь в области частот, меньших центральной частоты автономных осцилляторов, область трехчастотных торов не имеет амплитудного порога. Эти режимы могут возникать при сколь угодно малой величине сигнала. Полосы двухчастотных резонансных торов все еще достаточно узкие, но ширина их увеличилась. Теперь самое широкое окно резонансного тора типа $w = 1/2$ подходит к основанию языка, а значит, соответствующие резонансные торы теперь могут наблюдаться при малых амплитудах. В высокочастотной области $\Omega > 0$ изменения менее заметны, они имеют место лишь в окрестности острия языка синхронизации. В этой окрестности возникла небольшая область трехчастотных торов, также имеющая „контакт“ с осью нулевых амплитуд.

Еще более увеличим расстройку осцилляторов и перейдем к ситуации квазипериодической динамики автономных осцилляторов (рис. 1, *c*). Как следует из ляпуновской карты, внешний сигнал может точно захватить не только синхронизованные между собой осцилляторы, но и осцилляторы, свершающие квазипериодические колебания. При этом, однако, частота внешней силы должна быть близка к собственной частоте второго осциллятора $\Omega_2 = \Delta/4$. Важно и то, что синхронизация квазипериодического режима носит пороговый характер по амплитуде. Из (7) легко находим этот порог: $b_c = \Delta/2 - 2\mu$. С другой стороны, амплитудный порог возникновения трехчастотных торов исчезает и в высокочастотной области. Теперь трехчастотные торы занимают всю нижнюю часть карты. Область двухчастотных торов при малых амплитудах стала иметь вид традиционного языка с острием точно на частоте захвата автономных осцилляторов. Правее этого острия можно видеть новую, четко выраженную систему языков резонансных двухчастотных торов с числами вращения $w = 2/1, 1/0$ и т.д. Она занимает определенный диапазон в окрестности частоты второго осциллятора $\Omega_2 = \Delta/4$ и напоминает традиционную систему языков Арнольда периодических режимов.

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-02-00426-а.

Список литературы

- [1] *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
- [2] *Пиковский А., Розенблом М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
- [3] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
- [4] *Анищенко В.С.* и др. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
- [5] *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* // CHAOS. 2008. V. 18. P. 037123.
- [6] *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* // Europhysics Letters. 2009. V. 86. P. 30003.
- [7] *Анищенко В.С.* и др. // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 237.
- [8] *Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С.* // Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 1. 149 с.