07

Круговой фурье-анализ мод микроструктурных оптических волокон со сложным сечением образующих каналов

© А.Б. Сотский, Л.И. Сотская, О.А. Паушкина

Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев, Белоруссия
Белорусско-Российский университет, Могилев, Белоруссия
E-mail: AB_Sotsky@mail.ru

В окончательной редакции 22 января 2010 г.

Развит метод расчета микроструктурных оптических волокон (МОВ) со сложным сечением образующих каналов. Исследованы вытекающие моды МОВ с каналами эллиптического сечения. Показано, что в данных волокнах возможна существенная анизотропия в затухании ортогонально-поляризованных мод.

Внимание к микроструктурным оптическим волокнам, образованным воздушными каналами в диэлектрической среде, вызвано их уникальными дисперсионными, поляризационными и нелинейными свойствами. Моды МОВ обычно являются вытекающими, поэтому особый интерес представляют методы расчета модовых характеристик МОВ, позволяющие учесть эффект изучения света из волноводного канала. Вместе с тем известные строгие методы такого рода [1–3] имеют ограниченную область применимости, так как они сформулированы только для простейшего случая образующих каналов с цилиндрической симметрией.

Для исследования мод МОВ со сложным сечением образующих каналов в [4] был предложен метод кругового фурье-анализа. Однако соответствующее рассмотрение базировалось на скалярном приближении. В настоящем сообщении представлено обобщение данного подхода с целью решения волноводной задачи в неупрощенной векторной постановке. Развитый метод применен к исследованию вытекающих мод МОВ с каналами эллиптического сечения. Показано, что в данных

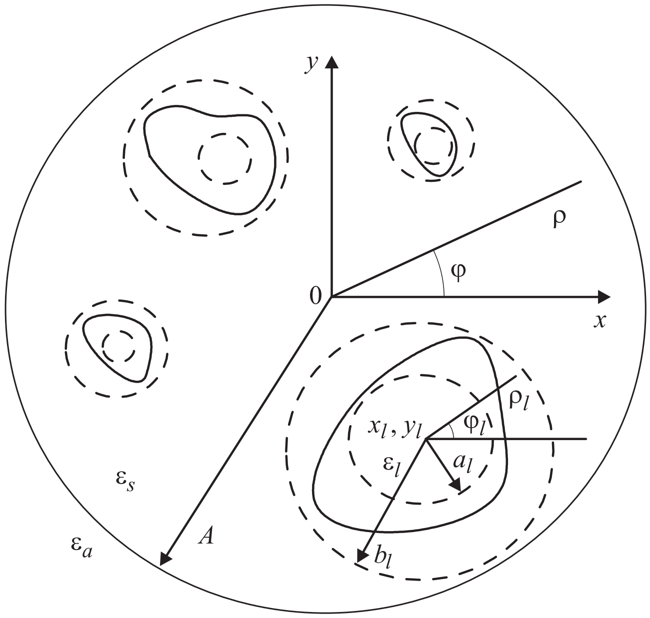

Рис. 1. Поперечное сечение исследуемых волокон.

волокнах может наблюдаться существенное различие в коэффициентах затухания ортогонально-поляризованных мод.

Поперечное сечение исследуемых МОВ представлено на рис. 1. Здесь имеется круговая область радиуса A (оболочка волокна), окруженная однородной средой с диэлектрической проницаемостью ε_a. Внутри указанной области располагаются k включений произвольной формы (сечения образующих каналов). Включения окружены однородной средой с проницаемостью ε_s. Предполагается, что l-е включение $(l = \overline{1, k})$ может быть заключено в некоторую окружность радиуса b_l, причем такие окружности, относящиеся к различным включениям, не пересекаются. Диэлектрическая проницаемость внутри включений может быть произвольной функцией поперечных координат (направляющие каналы в общем случае могут иметь неоднородное заполнение). В дальнейшем мы будем использовать декартовы координаты x, y, полярные координаты ρ, φ и локальные полярные координаты ρ_l, φ_l для каждого из включений (рис. 1).

Предположим, что МОВ направляет моду с зависимостью от времени t и продольной координаты z в форме $\exp[i(\omega t - \beta z)]$, где β — комплексная постоянная распространения моды. Тогда уравнения Максвелла могут быть сведены к системе уравнений второго порядка относительно поперечных компонент магнитного поля моды H_x, H_y:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2\varepsilon_s - \beta^2\right) H_\pm = -\,k_0^2\big(\varepsilon(x, y) - \varepsilon_s\big)H_\pm \pm E\left(i\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \mp \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right), \tag{1}$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число вакуума, $H_\pm = H_x \pm iH_y$, $E = \varepsilon^{-1}(\partial H_y/\partial x - \partial H_x/\partial y)$. Применяя к (1) теорему Грина, получаем уравнения

$$\sum_{l=1}^{k} \Omega_l^\pm(x, y) + \Omega^\pm(x, y) = F_\pm(x, y), \tag{2}$$

$$\Omega_l^\pm(x, y) = b_l \int_0^{2\pi} d\varphi_l \left(G\,\frac{\partial}{\partial \rho_l}\,H_\pm - H_\pm\,\frac{\partial}{\partial \rho_l}\,G\right)_{\rho_l = b_l}, \tag{3}$$

$$\Omega^\pm(x, y) = -A \int_0^{2\pi} d\varphi' \left(G\,\frac{\partial}{\partial \rho'}\,H_\pm - H_\pm\,\frac{\partial}{\partial \rho'}\,G\right)_{\rho' = A}, \tag{4}$$

где $F_\pm(x, y) \equiv 0$ при $\rho > A$, а также при $\rho < A$ в областях включений, $F_\pm(x, y) \equiv H_\pm(x, y)$ при $\rho < A$ вне включений; $G = 0.25iH_0^{(2)}(\chi_s r)$, $H_0^{(2)}(\chi_s r)$ — функция Ханкеля, $\chi_s = \sqrt{k_0^2\varepsilon_s - \beta^2}$, $r = \sqrt{(x_l + \rho_l\cos\varphi_l - x)^2 + (y_l + \rho_l\sin\varphi_l - y)^2}$ в (3), $r = \sqrt{(\rho'\cos\varphi' - x)^2 + (\rho'\sin\varphi' - y)^2}$ в (4), x_l, y_l — координаты центра l-го включения.

Для алгебраизации уравнений (2) заметим, что в области $\rho > A$ поле моды может быть представлено полиномом Фурье [3]:

$$H_\pm = \sum_{v=-m}^{m} C_v^\pm \exp(iv\varphi) H_v^{(2)}(\chi_a\rho), \tag{5}$$

где m — порядок редукции ряда Фурье по угловой переменной, $C_v^\pm$ — некоторые коэффициенты, $\chi_a = \sqrt{k_0^2\varepsilon_a - \beta^2}$ ($\mathrm{Re}\,\chi_a > 0$ для вытекающих мод, $\operatorname{Im}\chi_a < 0$ для собственных мод). Подставляя (5) в (4) и учитывая, что в (4) при $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

$$H_0^{(2)}(\chi_s r) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \exp(iv(\varphi-\varphi')) \begin{cases} H_v^{(2)}(\chi_s\rho')J_v(\chi_s\rho) & \text{при} \quad \rho < \rho' \\ J_v(\chi_s\rho')H_v^{(2)}(\chi_s\rho) & \text{при} \quad \rho > \rho' \end{cases} \tag{6}$$

($J_v(\ldots)$ — функции Бесселя) [3], находим

$$\Omega^{\pm}(\rho,\varphi) = \sum_{v=-m}^{m} \left[Z_v U_v^{\pm} C_v^{\pm} + Z_{v\pm2} V_v^{\pm} C_v^{\pm}\right], \tag{7}$$

где

$$U_v^{\pm} = \mp 0.25 iA\pi\left[\chi_a(1+\varepsilon_s\varepsilon_a^{-1})H_{v\mp1}^{(2)}(\chi_a A)\overline{Z}_v - 2\chi_s H_v^{(2)}(\chi_a A)\overline{Z}_{v\mp1}\right],$$

$$V_v^{\pm} = \pm 0.25 iA\pi\chi_a(1-\varepsilon_s\varepsilon_a^{-1})H_{v\pm1}^{(2)}(\chi_a A)\overline{Z}_{v\pm2},$$

$$Z_v = J_v(\chi_s\rho)\exp(iv\varphi), \quad \overline{Z}_v = H_v^{(2)}(\chi_s A) \quad \text{при} \quad \rho < A,$$

$$Z_v = H_v^{(2)}(\chi_s\rho)\exp(iv\varphi), \quad \overline{Z}_v = J_v(\chi_s A) \quad \text{при} \quad \rho > A.$$

В области l-го включения $(l = \overline{1,n})$ поле моды представим в виде полиномов Фурье

$$H_{\pm} = \sum_{v=-m}^{m} D_{lv}^{\pm}(\rho_l)\exp(iv\varphi_l), \quad E, H = \sum_{v=-m-1}^{m+1} D_{lv}^{(e),(h)}(\rho_l)\exp(iv\varphi_l), \tag{8}$$

где $H = \partial H_x/\partial x - \partial H_y/\partial y$ — функция, пропорциональная продольной компоненте магнитного поля. После подстановки (8) в (3) и использования соотношений ортогональности для экспонент приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{d\rho_l} D_{lv}^{(h)} = 0.5\beta^2 P_{lv} + i\rho_l^{-1} \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{v\mu}\mu D_{l\mu}^{(e)} - 0.5k_0^2 \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{v\mu} P_{l\mu}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{d\rho_l} D_{lv}^{(e)} = 0.5ik_0^2 M_{lv} - i\rho_l^{-1} \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{v\mu}^{-1}\mu D_{l\mu}^{(h)} - 0.5i\beta^2 \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{v\mu}^{-1} M_{l\mu}, \tag{10}$$

$$\frac{d}{d\rho_l} P_{l\upsilon} = 2D_{l\upsilon}^{(h)} - \upsilon\rho_l^{-1} M_{l\upsilon} - \rho_l^{-1} P_{l\upsilon}, \tag{11}$$

$$\frac{d}{d\rho_l} M_{l\upsilon} = -\upsilon\rho_l^{-1} P_{l\upsilon} - \rho_l^{-1} M_{l\upsilon} + 2i \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{\upsilon\mu} D_{l\mu}^{(e)}, \tag{12}$$

где

$$P_{l\upsilon} = D_{l\upsilon+1}^{+} + D_{l\upsilon-1}^{-}, \quad M_{l\upsilon} = D_{l\upsilon+1}^{+} - D_{l\upsilon-1}^{-},$$

$$(\varepsilon_{\upsilon\mu}, \varepsilon_{\upsilon\mu}^{-1}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp[i(\mu - \upsilon)\varphi_l](\varepsilon, \varepsilon^{-1}) d\varphi_l.$$

Предположим, что в l-м включении может быть выделена некоторая окружность радиусом a_l (рис. 1), в пределах которой диэлектрическая проницаемость не зависит от координат и равна ε_l (в случае направляющих каналов с неоднородным заполнением $a_l \to 0$). Внутри данной окружности $\varepsilon_{\upsilon\mu} = \delta_{\upsilon\mu}\varepsilon_l$, $\varepsilon_{\upsilon\mu}^{-1} = \delta_{\upsilon\mu}\varepsilon_l^{-1}$ ($\delta_{\upsilon\mu}$ — символ Кронекера), и уравнения (9)–(12) сводятся к уравнениям Бесселя относительно функций $D_{l\upsilon}^{\pm}(\rho_l)$, $D_{l\upsilon}^{(h),(e)}(\rho_l)$. В результате при $\rho_l < a_l$

$$D_{l\upsilon}^{\pm}(\rho_l) = C_{l\upsilon}^{\pm} J_\upsilon(\chi_l\rho_l), \quad D_{l\upsilon}^{(h),(e)}(\rho_l) = C_{l\upsilon}^{(h),(e)} J_\upsilon(\chi_l\rho_l), \tag{13}$$

где $\chi_l = \sqrt{k_0^2\varepsilon_l - \beta^2}$, $C_{l\upsilon}^{\pm}$, $C_{l\upsilon}^{(h),(e)}$ — некоторые коэффициенты, $J_\upsilon(\chi_l\rho_l)$ — функции Бесселя. Заметим также, что в соответствии с (9)–(12)

$$C_{l\upsilon}^{(h)} = 0.5\chi_l(C_{l\upsilon+1}^{+} - C_{l\upsilon-1}^{-}), \quad C_{l\upsilon}^{(e)} = 0.5\chi_l(i\varepsilon_l)^{-1}(C_{l\upsilon+1}^{+} + C_{l\upsilon-1}^{-}). \tag{14}$$

Полагая в (13) $\rho_l = a_l$ и учитывая (14), приходим к задаче Коши для уравнений (9)–(12). Интегрирование этой задачи позволяет выразить величины $H_{\pm}(b_l)$ и $dH_{\pm}(b_l)/d\rho_l$, фигурирующие в (3), через коэффициенты $C_{l\upsilon}^{\pm}$ посредством линейных соотношений. Далее, переходя в (3) к локальной системе координат l-го включения и используя представление, аналогичное (6), получаем выражения

$$\Omega_l^{\pm}(\rho_l, \varphi_l) = \sum_{\upsilon=-m}^{m} Z_{l\upsilon} \sum_{\mu=-m}^{m} (S_{2\upsilon\mu}^{\pm} C_{l\mu}^{+} + S_{1\upsilon\mu}^{\pm} C_{l\mu}^{-}), \tag{15}$$

$$S^{\pm}_{k\upsilon\mu} = 0.5i\pi b_l \big[(D^{(h)}_{l\upsilon\mp1} \pm i\varepsilon_s D^{(e)}_{l\upsilon\mp1})\overline{Z}_{l\upsilon} \mp 0.5\chi_s(P_{l\upsilon\mp1} \pm M_{l\upsilon\mp1})\overline{Z}_{l\upsilon\mp1}\big]_{\rho_l=b_l}, \tag{16}$$

где $k = 1, 2$,

$$Z_{l\upsilon} = J_\upsilon(\chi_s\rho_l)\exp(i\upsilon\varphi_l), \quad \overline{Z}_{l\upsilon} = H^{(2)}_\upsilon(\chi_s b_l) \quad \text{при} \quad \rho_l < b_l,$$

$$Z_{l\upsilon} = H^{(2)}_\upsilon(\chi_s\rho_l)\exp(i\upsilon\varphi_l), \quad \overline{Z}_{l\upsilon} = J_\upsilon(\chi_s b_l) \quad \text{при} \quad \rho_l > b_l.$$

Коэффициенты $D^{(h),(e)}_{l\upsilon}(b_l)$, $P_{l\upsilon}(b_l)$ и $M_{l\upsilon}(b_l)$ в (16) рассчитываются в результате интегрирования уравнений (9)–(12) на отрезке $a_l \leqslant \rho_l \leqslant b_l$ с начальными условиями

$$M_\upsilon(a_l) = -P_\upsilon(a_l), \quad C^{(e)}_\upsilon(a_l) = -\frac{C^{(h)}_\upsilon(a_l)}{i\varepsilon_l},$$

$$P_\upsilon(a_l) = \delta_{\upsilon\mu+1}J_\mu(\chi_l a_l), \quad C^{(h)}_\upsilon(a_l) = -\frac{\chi_l}{2}\,\delta_{\upsilon\mu+1}J_{\mu+1}(\chi_l a_l)$$

при построении матриц $S^{\pm}_{1\upsilon\mu}$ и

$$M_\upsilon(a_l) = P_\upsilon(a_l), \quad C^{(e)}_\upsilon(a_l) = \frac{C^{(h)}_\upsilon(a_l)}{i\varepsilon_l},$$

$$P_\upsilon(a_l) = \delta_{\upsilon\mu-1}J_\mu(\chi_l a_l), \quad C^{(h)}_\upsilon(a_l) = \frac{\chi_l}{2}\,\delta_{\upsilon\mu-1}J_{\mu-1}(\chi_l a_l)$$

при построении матриц $S^{\pm}_{2\upsilon\mu}$. В общем случае данное интегрирование должно осуществляться численно. Расчеты упрощаются, если l-е включение обладает круговой симметрией, поскольку в этом случае матрицы $S^{\pm}_{k\upsilon\mu}$ являются диагональными. Дальнейшее упрощение имеет место при рассмотрении МОВ, образованных однородными круговыми каналами либо капиллярами. Для таких волокон система уравнений (9)–(12) интегрируется в цилиндрических функциях, а уравнения (2) переходят в соответствующие аналитические выражения, полученные ранее в [2,3].

После поочередного перехода к локальным системам координат включений ρ_l, φ_l $(l = \overline{1, k})$ в (7) и к системам координат ρ, φ и ρ_j, φ_j $(j \neq l)$ в (15) на основании теоремы сложения цилиндрических функций Графа функциональное уравнение (2) преобразуется в однородную алгебраическую систему $MX = 0$, где под X понимается вектор-столбец размерности $(2k + 1)(2m + 1)$, составленный из коэффициентов $C^{\pm}_\upsilon$ и $C^{\pm}_{l\upsilon}$ (преобразования такого типа рассмотрены в [3]). Расчет

Зависимость расчетных значений постоянных распространения основных H_x- и H_y-мод от порядка полиномов Фурье m

H_x			H_y		
m	$k_0^{-1}\mathrm{Re}\,\beta$	$k_0^{-1}\mathrm{Im}\,\beta \cdot 10^{10}$	m	$k_0^{-1}\mathrm{Re}\,\beta$	$k_0^{-1}\mathrm{Im}\,\beta \cdot 10^{10}$
4	1.428355	−1.22	4	1.428169	−1.55
8	1.428360	−6.04	8	1.428162	−1.41
12	1.428376	−5.65	12	1.428154	−1.41
16	1.428384	−5.59	16	1.428150	−1.41
20	1.428388	−5.58	20	1.428147	−1.41

модовых характеристик МОВ сводится к решению дисперсионного уравнения $\det M = 0$ относительно возможных значений β и последующему построению полей мод на основании выражений (2), (5), (8). Заметим, что в частном случае МОВ, образованных однородными круговыми каналами либо капиллярами, система $MX = 0$ полностью совпадает с аналогичными системами, полученными ранее в [2,3].

Мы применили изложенный метод к исследованию МОВ, сформированных из N гексагональных колец одинаковых воздушных каналов эллиптического сечения в кварцевом стекле. В геометрическом центре волокна канал отсутствует. Период гексагональной решетки равен Λ. Большие полуоси всех эллипсов ориентированы вдоль оси $0y$ (рис. 2). При расчетах радиусы введенных выше окружностей полагались равными $b_l = b$, $a_l = a$, где b и a — большая и малая полуоси эллипсов соответственно. Отметим, что, поскольку в сечении данных волокон имеются две оси симметрии $0x$ и $0y$, их моды имеют преимущественно линейную поляризацию с главными компонентами магнитного поля H_x (H_x-моды) либо H_y (H_y-моды) [3].

Результаты расчетов представлены в таблице и на рис. 2, 3. Они получены путем интегрирования уравнений (9)−(12) методом Рунге−Кутта четвертого порядка при значениях $N = 2$, $\varepsilon_s = \varepsilon_a = 2.1025 - i0$, $\varepsilon_l = 1 - i0$ и с сохранением пропорции $ab/\Lambda^2 = 1/8$.

Таблица и рис. 2 относятся к $\Phi = b/a = 1.5$, $\Lambda/\lambda_0 = 2$. Согласно таблице, приемлемая для приложений точность расчетов достигается при $m \geqslant 12$. На рис. 2 представлены четверти симметричных распределений интенсивности $S_z(x, y)$ (S_z — составляющая вектора Пойнтинга) основных H_x- и H_y-мод. Изолинии на рис. 2 соответствуют $m \geqslant 12$

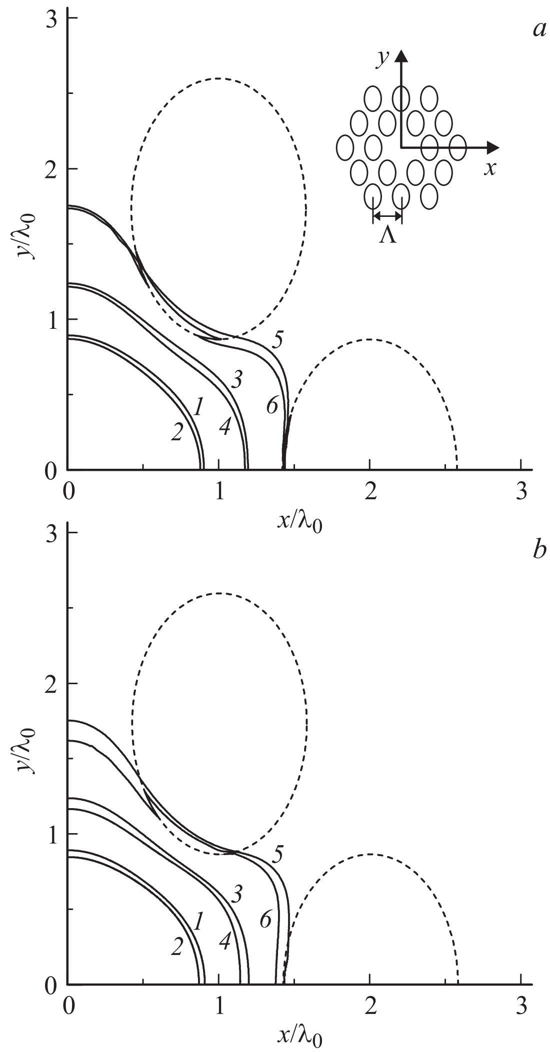

Рис. 2. Изолинии интенсивности $S_z/S_{z\,\max} = e^{-1}$ (*1, 2*), e^{-2} (*3, 4*), e^{-4} (*5, 6*) основных H_x (*a*) и H_y (*b*) мод. Кривые *1, 3, 5* — приближение [4], *2, 4, 6* — разработанный метод. На вставке — поперечное сечение МОВ; пунктир — границы включений.

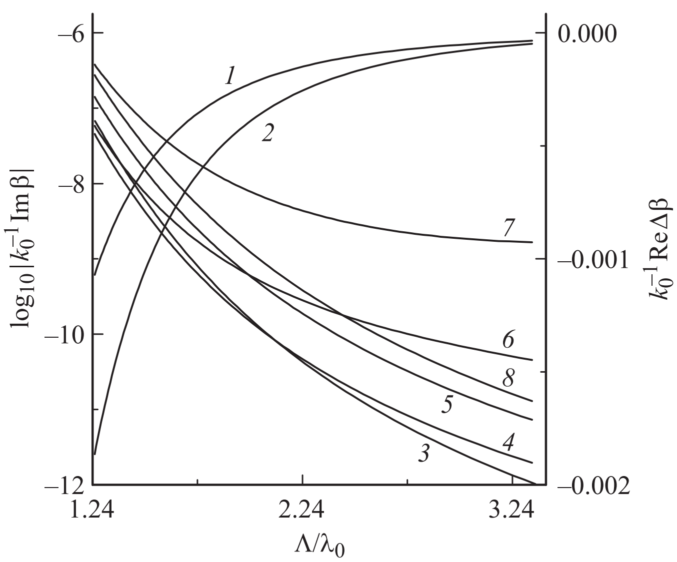

Рис. 3. Зависимости $\mathrm{Re}\,\Delta\beta(\lambda_0)$ (*1, 2*) при $\Phi = 1.5$ (*1*), $\Phi = 2$ (*2*) и $\mathrm{Im}\,\beta(\lambda_0)$ (*3–8*) при $\Phi = 1$ (*3*), $\Phi = 1.5$ (*4, 5*), $\Phi = 2$ (*6, 7*), рассчитанные предлагаемым методом. Кривые *3, 4, 6* относятся к H_y-модам, *3, 5, 7* — к H_x-модам. Кривая *8* — приближение [4] для $\Phi = 1.5$.

(кривые, рассчитанные при различных значениях m из указанного диапазона, в масштабах рисунка неотличимы).

Рис. 3 иллюстрирует дисперсионные характеристики основных ортогонально-поляризованных мод волокон при различных значениях параметра эллиптичности каналов Ф. Здесь использовано обозначение $\Delta\beta = \beta_y - \beta_x$, где β_y и β_x — постоянные распространения H_y- и H_x-мод ($\mathrm{Re}\,\Delta\beta$ характеризует модовое двулучепреломление). Согласно рис. 3, двулучепреломление увеличивается с ростом Ф и с уменьшением отношения Λ/λ_0. Подобные закономерности уже отмечались ранее в [5,6]. Оригинальными являются дисперсионные зависимости для мнимых частей постоянных распространения (поскольку среды, формирующие волокна, прозрачны, приведенные графики характеризуют затухание мод, вызванное вытеканием излучения из сердцевины волокон). Из рис. 3 видно, что в отличие от поведения вещественных частей постоянных распространения поляризационная зависимость затухания мод становится резко выраженной при увеличении отношения Λ/λ_0. Данный эффект может быть использован при создании одномодовых однополяризационных МОВ для сенсорных приложений.

На рис. 2, 3 представлены также кривые, рассчитанные в скалярном приближении [4]. Как видно из рисунков, это приближение является довольно грубым, особенно при описании коэффициентов затухания вытекающих мод. Кроме того, поскольку H_x- и H_y-моды в скалярном приближении вырождены, оно не пригодно для описания модового двулучепреломления и поляризационной зависимости потерь.

Итак, предложен метод расчета модовых характеристик микроструктурных оптических волокон со сложным сечением образующих каналов. Сформулированная расчетная схема проста в программной реализации и позволяет исследовать векторную волноводную задачу как для собственных, так и для вытекающих мод.

Список литературы

[1] *White T.P., Kuhlmey B.T., Mc Phedran R.C.* et al. // J. Opt. Soc. Am. B. 2002. V. 19. N 10. P. 2322–2330.
[2] *Сотский А.Б., Сотская Л.И.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 18. С. 37–44.
[3] *Сотский А.Б., Сотская Л.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. В. 23. С. 32–40.
[4] *Сотский А.Б., Сотская Л.И.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. В. 1. С. 90–97.
[5] *Steel M.J., Osgood R.M.* // J. Lightwave Technol. 2001. V. 19. N 4. P. 495–503.
[6] *Wang L., Yang D.* // Opt. Express. 2007. V. 15. N 14. P. 8892–8897.