05;12

Оценки предельных магнитных полей, достижимых в неразрушаемых квазибессиловых магнитах с большим числом уравновешенных модулей

© Г.А. Шнеерсон, Д.А. Дёгтев

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
E-mail: integr@delfa.net

Поступило в Редакцию 20 января 2010 г.

Рассмотрена магнитная система, состоящая из большого числа коаксиальных модулей с квазибессиловыми обмотками и равнонагруженными промежуточными бандажами. Квазибессиловые обмотки полностью уравновешены в осевом и радиальном направлениях. Периферийные части модулей с полоидальным током поддерживаются равнонагруженными диэлектрическими бандажами. Рассчитан предельный случай, когда число модулей велико, и толщина каждого из них много меньше внутреннего радиуса. В этом случае допустимо считать распределение полоидального тока непрерывным, что дает возможность получить аналитическое решение задачи. Полученное решение показывает, что отношение внешнего радиуса рассмотренной магнитной системы к внутреннему мало отличается от отношения магнитного давления расчетного поля к пределу прочности материала бандажей.

Предельная индукция поля, получаемого в неразрушаемых магнитах, определяется как прочностью материала обмотки, так и геометрическими характеристиками магнитной системы. Наиболее сильное поле может быть получено в равнонагруженных обмотках.

Для равнонагруженных соленоидов традиционного исполнения с азимутальным током [1–4] получена оценочная формула, связывающая отношение внешнего радиуса к внутреннему (аспектное отношение $A = R_2/R_1$), амплитуду индукции на оси B_0 и характерный прочностной параметр $B_M = \sqrt{2\mu_0\sigma}$, где σ — предел прочности материала обмотки. Это соотношение имеет вид [5,6]: $A = \exp(B_0^2/B_M^2)$. Оно относится к случаю соленоида большой длины и демонстрирует резкий рост аспектного отношения при увеличении индукции B_0 до значений, существенно превышающих прочностной параметр B_M.

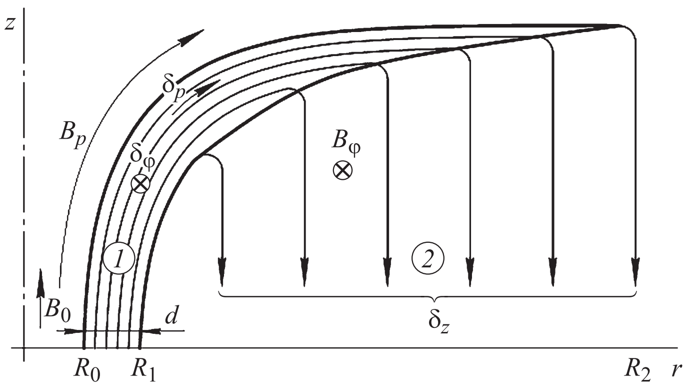

Рис. 1. Схема распределения тока и магнитного поля в квазибессиловом магните с равнонагруженной внешней зоной.

В описанных ранее магнитах с квазибессиловой обмоткой (рис. 1) в области *1* плотность тока имеет как полоидальную, так и азимутальную компоненты, и механические напряжения характеризуются оценочным значением $\sigma_1 \approx B_0^2/(2\mu_0 N^2)$, где N — число слоев тока. Внешний радиус такого магнита определяется размером области *2*, где замыкается полоидальный ток i_p и размещены бандажи, удерживающие проводники, по которым протекает этот ток [5,7,8]. При этом аспектное отношение существенно меньше, чем в соленоидах традиционного исполнения: в системе с равнонагруженными бандажами имеет место оценка $A \approx (2B_0^2/B_{M2}^2 + 1)^{1/2}$. Здесь характерная индукция B_{M2} определяется прочностным пределом материала бандажей σ_2.

Приведенные оценки получены в предположении, что число элементов магнитной системы (токовых слоев и бандажей) велико. Это позволяет использовать допущение о непрерывном распределении тока при расчете поля и электромагнитных сил.

В квазибессиловом магните приведенная оценка аспектного отношения соответствует определенной зависимости для функции полоидального тока $\psi_i = i_p(r)/(2\pi)$ во внешней области *2*. Эта зависимость описывается формулой $\psi_i(r) = (C - r^2\sigma/\mu_0)^{1/2}$, где C — постоянная, зависящая от вида граничного условия [8].

Исследования показывают, что при таком распределении полоидального тока равновесие торцевой части обмотки с аспектным отношением

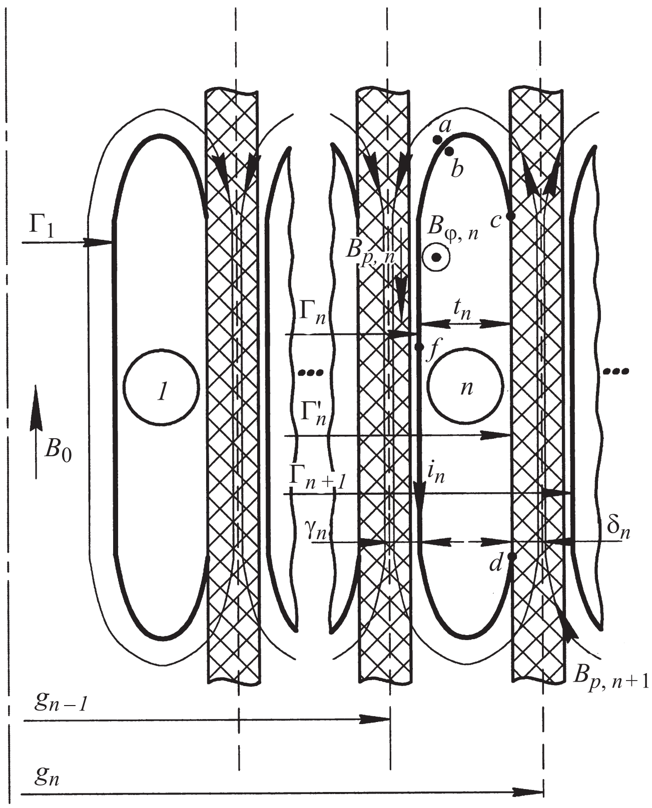

Рис. 2. Магнитная система, состоящая из большого числа частично уравновешенных коаксиальных модулей с диэлектрическими бандажами.

$A \geqslant 1.7$ можно обеспечить только с помощью дополнительного диамагнитного экрана [7,8].

В данной работе дается оценка аспектного отношения для квазибессилового магнита, состоящего из большого числа коаксиальных модулей (рис. 2). В такой системе можно путем соответствующего выбора конфигурации обеспечить равновесие квазибессиловой обмотки без применения торцевых экранов.

Условной границей между модулями можно считать цилиндрические поверхности с радиусами g_n. На этих поверхностях магнитный поток полоидального поля принимает значение, равное нулю. Часть поверхности модуля (участок cfd) уравновешена. На этой части выполнено условие равенства магнитных давлений по обе стороны обмотки: $B_p^2(a) = B_\phi^2(b)$. В этой формуле $B_p(a)$ — индукция полоидального поля, $B_\phi(b)$ — индукция тороидального поля на участке cfd.

При таком условии остаточное напряжение в квазибессиловой обмотке (на указанном участке) оценивается по приведенной выше формуле и может быть достаточно мало, поскольку оно имеет порядок величины $B_p^2(f)/(2\mu_0 N^2)$, где N — число слоев обмотки.

Наиболее нагруженными частями многомодульной магнитной системы являются диэлектрические бандажи, удерживающие неуравновешенные участки обмотки cd (рис. 2). Формула, определяющая азимутальное напряжение в бандаже, имет вид:

$$\frac{2\sigma_2}{\mu_0} = \frac{\theta_n^2 + 1}{\theta_n^2 - 1}\left(\frac{\psi_{i,n}^2}{r_n^2 A_n^2} - \frac{\psi_{i,n+1}^2}{r_{n+1}^2}\right). \tag{1}$$

В этой формуле $\theta_n = r_{n+1}/r'_n$, $A_n = r'_n/r_n$, $\psi_{i,n} = i_n/(2\pi)$, i_n — полоидальный ток в обмотке. По аналогии с работой [8] в этой формуле σ_2 обозначает азимутальное напряжение в бандаже.

В магнитной системе, у которой число модулей M много больше единицы, обмотка представляет собой систему, в которой выполнено условие $\_t_n + \delta_n + \gamma_n \ll r_n$ (рис. 2), поэтому числа $A_n = 1 + t_n/r_n$ и $\theta_n = (r_n + t_n + \delta_n)/(r_n + t_n) \approx 1 + \delta_n/r_n$ близки к единице. В рассматриваемой системе также имеет место приближенное равенство $(\theta_n^2 + 1)/(\theta_n^2 - 1) \approx r_n/\delta_n$.[1]

При условии $M \gg 1$ можно перейти от дискретной переменной r_n к непрерывно меняющейся переменной r и считать $\psi_{i,n,}$, t_n, γ_n и δ_n непрерывными функциями аргумента r. Тогда $\psi_{i,n+1} \approx \psi_i(r) + \frac{d\psi}{dr}\Delta r_n$, где $\Delta r_n = t_n + \delta_n + \gamma_n$. Отсюда следует приближенное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{i,n+1}^2}{r_{n+1}^2} &\approx \left(\psi_{i,n}(r) + \frac{d\psi}{dr}\Delta r_n\right)^2 \frac{1}{r^2}\frac{1}{(1 + \Delta r_n/r)^2} \\ &\approx \frac{\psi_{i,n}^2(r)}{r^2} + 2\psi_{i,n}\frac{d\psi_i}{dr}\frac{\Delta r_n}{r^2} - 2\psi_{i,n}^2\frac{\Delta r_n}{r^3}. \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Здесь и в предыдущих формулах отброшены малые члены порядка $\delta_n t_n/r_n^2$.

Далее примем условие, что числа Δr_n, t_n, δ_n и γ_n одинаковы для всех модулей. В рассматриваемой системе нет полного равновесия модуля, однако размеры δ и γ близки. Для их рачета можно использовать уравнение

$$\frac{\psi_{i,n}}{r_n}(r_n^2 - g_{n-1}^2) = \frac{\psi_{i,n+1}}{r_{n+1}}(g_n^2 - A_n^2 r_n^2). \tag{3}$$

После разложения по малому параметру $\Delta r/r$ проходим к следующему уравнению, в котором отброшены члены порядка $(\Delta r/r)^2$:

$$\frac{\delta - \gamma}{\delta} = -\frac{\Delta r}{r\psi_i}\frac{d}{dr}(r\psi_i). \tag{4}$$

В правой части этого уравнения фигурирует отношение приращения радиуса Δr к характерному размеру магнитной системы. В магнитной системе с большим числом модулей это отношение много меньше единицы. При условии $\Delta r = \gamma + \delta + t \ll r$ поле в окрестности каждого модуля мало отличается от плоскопараллельного. В таком поле модуль полностью уравновешен, если зазоры δ и γ равны. В равновесном модуле магнитное давление полоидального поля постоянно на всей границе. В работе [9] показано, что это имеет место, если выполнено условие $\delta = \gamma = t/2$. Его можно принять при дальнейших расчетах. Воспользуемся также приближенным равенством $1/A_n^2 \approx 1 - 2t/r$. После подстановки полученных приближенных выражений в формулу (1) получаем дифференциальное уравнение для функции $\psi_i(r)$:

$$\frac{\psi_i}{r}\frac{d\psi_i}{dr}\kappa - \frac{\psi_i^2}{r^2} + \frac{\sigma}{\mu_0} = 0, \tag{5}$$

где $\kappa = 1 + t/(\delta + \gamma)$. Уравнение (5) должно удовлетворять следующему граничному условию на внутренней границе магнитной системы (при $r = R_1$): $\psi_i(R_i) = B_0 R_1/\mu_0$, где B_0 — индукция поля на оси магнита.

В рассматриваемом предельном случае $k \approx 2$. При этом абсолютные значения индукции полоидального поля по обе стороны каждого модуля близки и давление, воздействующее на бандаж, мало. Однако напряжение в нем остается конечным, поскольку отношение толщины бандажа к радиусу также мало.

В безразмерных переменных уравнение (5) принимает вид:

$$\rho y\frac{dy}{dp} - \frac{y^2}{\kappa} + \frac{\alpha}{2\kappa}p^2 = 0, \tag{6}$$

где использованы переменные $\rho = r/R_1$, $y = \psi_i/\psi_{i,1}$, $\alpha = B_{M2}^2/B_0^2$. Решение этого уравнения имеет следующий вид [10]:

$$y^2 = C\rho^{2/\kappa} - \alpha\rho^2\kappa/2(\kappa - 1), \tag{7}$$

где постоянная C может быть найдена по заданному граничному условию: $y = 1$ при $\rho = 1$. Отсюда следует: $C = 1 + \alpha\,\kappa/2(\kappa - 1)$. Таким образом, находим зависимость $y(\rho)$:

$$y = \left[\left(1 + \frac{\alpha\kappa}{2(\kappa - 1)}\right)\rho^{2/\kappa} - \frac{\alpha\kappa}{2(\kappa - 1)}\rho^2\right]^{1/2}. \tag{8}$$

На внешней границе области $(r = R_2)$ имеем $y = 0$, поэтому можно найти отношение внешнего радиуса магнитной системы к внутреннему радиусу первого модуля:

$$A = \frac{R_2}{R_1} = \left(1 + \frac{2(\kappa - 1)}{\alpha\kappa}\right)^{\kappa/2(k-1)}. \tag{9}$$

Этот результат может быть использован для оценки внешнего радиуса многомодульной магнитной системы с равнонагруженными бандажами и уравновешенными торцевыми частями. В случае, когда $\kappa = 2$, имеем:

$$A = 1 + \frac{1}{\alpha_1}. \tag{10}$$

В частном случае $\kappa \gg 1$ уравнение (9) описывает рассмотренную ранее [5,7,8] систему с большим числом равнонагруженных бандажей. В такой системе имеем, как и раньше:

$$A = (1 + 2/\alpha)^{1/2}. \tag{11}$$

Эта система более компактна, чем многомодульная, однако в ней при отсутствии торцевого экрана не выполнены условия равновесия торцевых частей.

Интересно отметить, что в гипотетическом случае $\kappa \to 1$ формула (9) после предельного перехода дает значение

$$A = \exp(1/\alpha). \tag{12}$$

Этот результат соответствует приведенной выше оценке для многослойной обмотки с азимутальными токами.

Таким образом, выражение (9) охватывает все три модели магнитных систем с непрерывным токораспределением. В частном случае $\alpha = 0.1$ значения аспектного отношения A, рассчитанные по формулам (11), (10) и (12), относятся как $4.58/11(2.2 \cdot 10^4)$.

Таким образом, переход к равнонагруженной многомодульной магнитной системе, которая имеет как азимутальный, так и полоидальный токи, не приводит к резкому увеличению внешнего радиуса по сравнению с системой с чисто аксиальными токами во внешней зоне магнита. Обе эти системы существенно компактнее магнитной системы с азимутальными токами. Они открывают возможности использования материалов с относительно низкой прочностью при получении сверхсильных магнитных полей без чрезмерного увеличения габаритов, а значит и энергии магнитной системы.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 07-08-00507-А и программы „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект № 2.1.2/5659).

Список литературы

[1] *Игнатченков В.А., Карпенко М.М.* // ЖТФ. 1968. Т. 38. С. 200.
[2] *Schneider-Muntau H.-J.* // Physique Sous Champes Intenses. 1974. P. 161.
[3] *Date M.A.* // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39. P. 892.
[4] *Campbell L.J., Boeing H.J., Schneider-Muntau H.-J.* // Physica B. 1996. V. 216. P. 218.
[5] *Шнеерсон Г.А.* // ЖТФ. 1986. Т. 56 (1). С. 36–43.
[6] *Herlach F., Volodin A., Vam Haesendock C.* // „Megagauss Magnetic Field Generation, its Application ot Science and ultra-high Pulsed-Power Technology“/ Ed by H.-J. Schneder-Muntau. Tallahassee, 1998. P. 185–187.
[7] *Shneerson G.A., Koltunov O.S.* et al. // Physica B. 2004. V. 346–347. P. 566–570.
[8] *Шнеерсон Г.А., Вечеров И.А., Дёгтев Д.А.* и др. // ЖТФ. 2008. Т. 78 (10). С. 29–39.
[9] *Новгородцев А.Б., Фатхиев А.Р.* // Изв. вузов. Сер. „Энергетика“. 1982. № 2. С. 17–21.
[10] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961. 703 с.