

05

## **Расчет силы трения между фрактальной шероховатой поверхностью и эластомером с произвольным линейным реологическим законом с использованием иерархической памяти**

© В.Л. Попов, А.В. Димаки

Берлинский технический университет, Берлин, Германия  
Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия  
E-mail: v.popov@tu-berlin.de

Поступило в Редакцию 5 августа 2010 г.

В рамках метода редукции размерности с использованием иерархически организованной памяти разработан алгоритм расчета силы трения между фрактальной шероховатой поверхностью и эластомером с произвольными линейными реологическими свойствами. Предлагаемый метод позволяет рассчитывать силу трения между эластомером и твердой поверхностью с экспериментально измеренной топографией с учетом как широкого спектра волновых векторов реальных поверхностей (от нанометров до сантиметров), так и широкого спектра времен релаксации (от наносекунд до секунд).

Расчет силы трения между твердыми шероховатыми поверхностями с заданной топографией и эластомерами до сих пор представляет собой сложную и не до конца решенную проблему. Ее сложность обусловлена прежде всего следующими двумя причинами: 1. Многие шероховатые поверхности имеют фрактальный характер, причем для корректного вычисления силы трения необходимо принимать во внимание весь спектр шероховатостей — от нанометровых до макроскопических. 2. Реологические свойства реальных эластомеров характеризуются широким спектром времен релаксации (от наносекунд до макроскопических времен), что вносит в задачу еще одну многомасштабность, на сей раз по времени.

Первая из этих проблем (пространственная многомасштабность) была решена в работах [1,2] путем использования метода редукции размерности (подробное описание метода см. также в [3]). В рамках

этого метода контакт между двумя трехмерными упругими (или вязкоупругими) телами замещается контактом между двумя одномерными „шероховатыми линиями“. В [1,2] было показано, что существует правило преобразования трехмерной системы в одномерную, при котором контактные свойства остаются инвариантными. Ранее было показано, что метод редукции размерности может быть успешно применен для вычисления площади реального контакта [4], полной длины реального контакта [5] и силы трения для материалов с простым реологическим законом [6]. Для второй названной выше проблемы (многомасштабность по времени) до сих пор не было найдено удовлетворительного решения. В данной работе для учета многомасштабности по времени мы предлагаем использовать иерархически организованную память. Объединение метода редукции размерности с иерархической памятью позволило создать чрезвычайно эффективный численный метод расчета силы трения между шероховатой поверхностью с произвольной топографией и эластомером с произвольной линейной реологией. В данной работе мы описываем предлагаемый метод и приводим результаты тестовых расчетов для систем, для которых существуют надежные теоретические оценки. При расчете силы трения эластомеров мы исходим из общепринятого представления, восходящего к работам Гроше [7,8], согласно которому трение эластомеров практически полностью обусловлено внутренними потерями в материале и поэтому тесно связано с его реологией.

В рамках метода редукции размерности эластомер моделируется как набор дискретных элементов, соединенных с жесткой „шероховатой линией“ элементами с комплексным коэффициентом жесткости  $\hat{k} = 4\hat{G}(\omega)\Delta x$ , где  $\Delta x$  — пространственный шаг дискретизации одномерной системы, а  $\hat{G}(\omega)$  — комплексный модуль сдвига эластомера. Этому комплексному коэффициенту жесткости отвечает явный закон

$$f_i(t) = 4\Delta x \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{z}_i(t')dt' \quad (1)$$

для силы, действующей на каждый расчетный элемент, причем  $G(t)$  есть зависящий от времени модуль сдвига эластомера (определение, см., например, [3]), а  $z_i$  — вертикальное перемещение  $i$ -го элемента. Спектральная плотность базисной шероховатой линии рассчитывается

как для твердой поверхности, так и для эластомера согласно правилу

$$C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q), \quad (2)$$

найденному в [1], где  $C_{2D}(q)$  — спектральная плотность двумерной поверхности, а  $C_{1D}(q)$  — спектральная плотность эквивалентной одномерной „поверхности“. Это правило совместно с приведенным выше правилом расчета сил гарантирует эквивалентность контактных свойств одномерной модели и реального трехмерного эластомера [1,3]. Для ускорения счета новые участки твердой поверхности генерируются по мере движения области контакта с эластомером с помощью алгоритма, описанного в [9].

Расчет силы трения производится согласно следующему алгоритму. Система иницируется путем приведения твердой поверхности и эластомера в первоначальный контакт. Начиная с этого момента к эластомеру прикладывается вертикальная сила  $F_N$ , а твердое контртело принудительно передвигается в отрицательном направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ . На каждом шаге проверяется выполнение условий контакта: элементы эластомера, находившиеся в контакте с твердой поверхностью, остаются с ней в контакте до тех пор, пока сила взаимодействия не станет отрицательной (поскольку мы рассматриваем контакт без адгезии, отрицательные контактные силы не допускаются; с этого момента контакт между эластомером и твердой поверхностью теряется). Напротив, элементы, которые не находились в контакте, считаются пришедшими в контакт с момента, когда разность между положением элемента эластомера и твердой поверхностью оказывается нулевой или отрицательной (в последнем случае элемент передвигается на поверхность и эта разность тем самым обращается в нуль). На каждом временном шаге контролируется условие равновесия нормальных сил и при необходимости восстанавливается путем передвижения эластомера как целого в вертикальном направлении. Для определения тангенциальной силы нормальная сила в каждом элементе умножается на тангенс угла наклона поверхности в данной точке.

Отмеченная выше проблема многомасштабности по времени состоит в том, что зависящий от времени модуль сдвига  $G(t)$  для реальных эластомеров обычно спадает со временем по степенному закону и тем самым не имеет характерного временного масштаба. Это означает, что для корректного вычисления силы (1) (актуальное значение которой необходимо на каждом временном шаге) требуется информация обо

всей истории изменения скоростей деформации каждого элемента системы, хранение которой в памяти приводит к чрезвычайному замедлению счета. Мы предлагаем следующий способ решения этой проблемы. Для вычисления силы

$$f(t) = 4\Delta x \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{z}(t')dt'$$

произведем сначала замену переменных  $t-t' = \xi$ :

$$f = 4\Delta x \int_0^{\infty} G(\xi)\dot{z}(t-\xi)d\xi. \quad (3)$$

Дискретизируем теперь переменную  $\xi$  следующим образом:  $\xi_n = T(e^{(n+1)\Delta\Psi} - 1)$ , где  $\Psi = (n+1)\Delta\Psi$ ,  $n = 0, 1, \dots, \infty$  — новая переменная, а  $\Delta\Psi$  и  $T$  — пока еще не определенные константы, и потребуем, чтобы интервал, соответствующий  $n = 0$ , был равен шагу интегрирования по времени  $\Delta t$ . Из этого требования следует  $e^{\Delta\Psi} = 1 + \Delta t/T = q$ . Величина  $q$  есть основание геометрической прогрессии, которую образует последовательность длин интервалов времени, соответствующих различным значениям  $n$ . Очевидно, имеют место следующие соотношения:  $T = \frac{\Delta t}{q-1}$ ,  $\Delta\Psi = \ln q$ . Исходя из них и приняв  $\Delta\xi_n = \xi_n - \xi_{n-1}$ , имеем

$$\xi_n = \Delta t \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad \Delta\xi_n = \Delta t q^n. \quad (4)$$

Применив правило средних прямоугольников (с использованием значений подынтегрального выражения в середине  $n$ -го интервала), запишем интеграл (3) в дискретной форме

$$f(t) = 4\Delta x \sum_{n=0}^{\infty} G(\xi_n - \Delta\xi_{n-1/2})\dot{z}(t - (\xi_n - \Delta\xi_{n-1/2}))\Delta\xi_n \quad (5)$$

и рассмотрим его значение на  $N$ -м временном шаге  $t_N = N\Delta t$ , при этом введя обозначение  $\dot{z}(N\Delta t - (\xi_n - \Delta\xi_{n-1/2})) = \dot{z}_N^n$ . Сила (1) может быть записана в виде

$$f(t_N) = 4\Delta x \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} G\left(\Delta t \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - q^{n-1/2}\right)\right) \dot{z}_N^n q^n. \quad (6)$$

Поскольку шаг суммирования в (6) растет экспоненциально с номером  $n$ , фактически достаточно производить суммирование до сравнительно небольшого  $n$ . Так, при  $q = 2$  и  $n = 20$  суммирование в (6) уже охватывает времена, различающиеся на 6 десятичных порядков величины; при  $q = 4$  для охвата такого же спектра времен была бы достаточна глубина памяти  $n = 10$ . Тем самым проблема многомасштабности по времени решена: благодаря иерархической структуре памяти время счета с увеличением продолжительности времени моделирования растет только логарифмически! Нетрудно показать, что правило обновления информации об истории скоростей деформации в иерархически организованной памяти дается следующим уравнением:

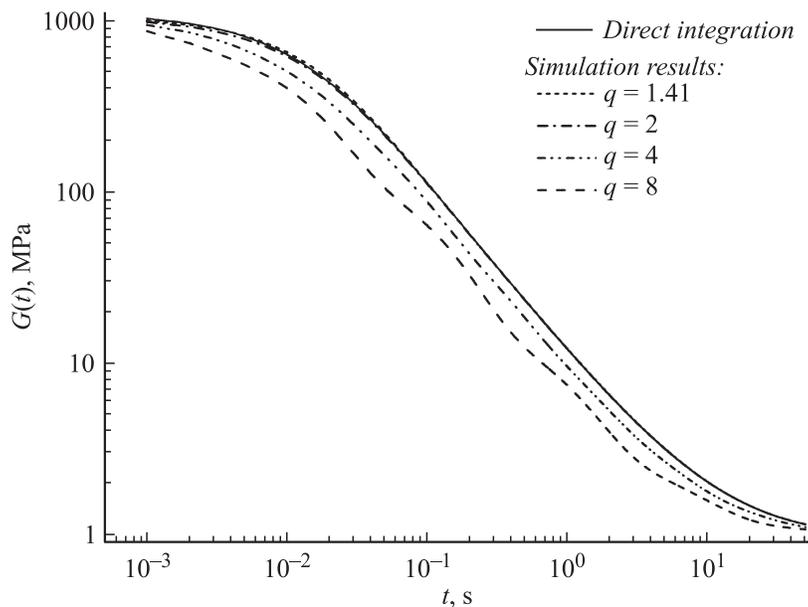
$$\dot{z}_{N+1}^n \approx \dot{z}_N^n + \frac{\dot{z}_N^{n-1} - \dot{z}_N^n}{q^n}. \quad (7)$$

Корректность процедуры расчета сил (6) и обновления информации в иерархической памяти (7) была проверена путем сравнения механического отклика элемента эластомера на единичный импульс скорости (мгновенную деформацию на фиксированную величину), с теоретической зависимостью модуля сдвига эластомера от времени  $G(t)$ , которая была задана нами в следующей интегральной форме [3]:

$$G(t) = G_0 + G_1 \tau_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{-s} e^{-t/\tau} d\tau \quad (8)$$

с  $G_0 = 1$  МПа,  $G_1 = 1000$  МПа,  $\tau_1 = 10^{-2}$  с,  $\tau_2 = 10^2$  с,  $s = 2$ . Данная функция характеризуется широким спектром времен релаксации от  $10^{-2}$  до  $10^2$  с и, таким образом, идеально подходит для тестирования предложенного метода. На рис. 1 приведены рассчитанные зависимости релаксации модуля сдвига со временем для  $q = \sqrt{2}, 2, 4, 8$ . При  $q = 2$  максимальное отклонение между модельной и теоретической зависимостями модуля сдвига от времени не превышает 5% (рис. 1).

Для верификации разработанной модели была рассчитана зависимость коэффициента трения от скорости движения жесткой поверхности, имеющей характерную длину волны  $\lambda = 20 \mu\text{m}$ . Для случайных поверхностей, имеющих характерную длину волны (не фрактальных), существует аналитическая оценка [3] для коэффициента трения, которая



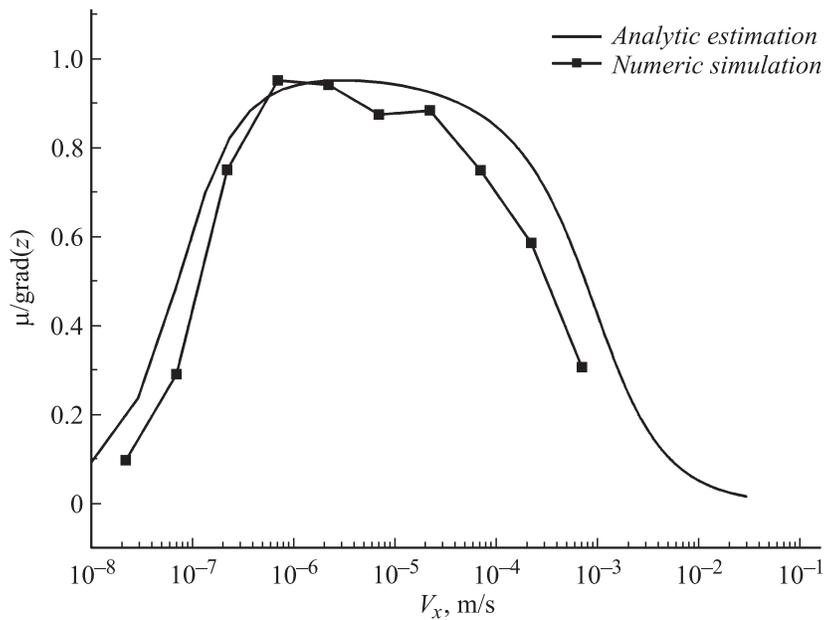
**Рис. 1.** Сравнение точной аналитической зависимости использованного модуля сдвига эластомера от времени (сплошная линия) и зависимостей, численно рассчитанных с помощью иерархической памяти при различных значениях  $q$ .

позволяет произвести предварительное тестирование предложенного метода:

$$\mu(kv) = \frac{G''(\xi kv)}{|\hat{G}(\xi kv)|} \nabla z. \quad (9)$$

Здесь  $\hat{G}(\xi kv)$  есть комплексный модуль сдвига, а  $G''(\xi kv)$  — его мнимая часть;  $k = 2\pi/\lambda$  — характерный (средний) волновой вектор шероховатой поверхности,  $\nabla z$  — среднеквадратичное значение градиента поверхностного профиля твердой поверхности и  $\xi$  — безразмерная константа.

Зависимость коэффициента трения от скорости, полученная численным моделированием согласно описанному выше алгоритму, а также аналитическая оценка, согласно (9), приведены на рис. 2. Хорошее согласие между аналитической и численной оценками зависимости



**Рис. 2.** Сравнение модельной зависимости коэффициента трения от скорости с аналитической оценкой.

коэффициента трения от скорости обеспечивается при  $\xi \approx 1/\pi$ . Сравнение данных зависимостей позволяет сделать вывод, что предложенный метод иерархической организации памяти предоставляет возможность адекватно моделировать трение между эластомерами и фрактальными шероховатыми поверхностями.

Авторы благодарят немецкую службу академических обменов (DAAD), немецкое научно-исследовательское общество (DFG) и European Science Foundation за финансовую поддержку.

## Список литературы

- [1] Geike T., Popov V.L. // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. 036710 (5 p).
- [2] Geike T., Popov V.L. // Tribology International. 2007. V. 40. P. 924–929.

- [3] *Popov V.L.* Contact Mechanics and Friction. Physical principles and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2010. 362 p.
- [4] *Popov V.L., Filippov A.E.* // Tech. Phys. Lett. 2008. V. 34. P. 722–724.
- [5] *Popov V.L., Filippov A.E.* // Tech. Phys. Lett. 2008. V. 34. P. 792–794.
- [6] *Попов В.Л., Филиппов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. В. 11. С. 77–82.
- [7] *Grosch K.A.* // Proc. Royal Society of London. Series A. Math. and Phys. Sci. 1963. V. 274. N 1356. P. 21–39.
- [8] *Grosch K.A.* // Rubber Chemistry and Technology. 1996. V. 69. P. 495–568.
- [9] *Filippov A.E., Popov V.L.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. 027103 (4 p).