

03

## Особенности течения тонкой пленки жидкости при изменении размера локального источника тепла на подложке

© Ю.О. Кабова

Институт теплофизики им. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск  
E-mail:kabova@itp.nsc.ru

Поступило в Редакцию 9 сентября 2010 г.

В результате численного исследования обнаружен эффект влияния ширины нагревателя на характер течения и экстремальные значения толщины тонкой пленки жидкости, стекающей под действием гравитации. Показано существование критических значений ширины нагревателя. Установлено влияние значения числа Рейнольдса на рассматриваемые процессы.

Стекающие пленки жидкости широко применяются для охлаждения электронных устройств, для интенсификации теплообмена и т.д. Локальный или неоднородный нагрев поверхности является характерной особенностью многих процессов, происходящих в природе и технике, например распределение тепла на чипе компьютера является сильно нелинейным и размеры горячих пятен могут варьироваться от нескольких микрометров до нескольких миллиметров. В работе [1] экспериментально обнаружено и исследовано явление формирования пространственной самоорганизующейся структуры в тонкой движущейся под действием гравитации пленке жидкости при ее локальном нагреве со стороны подложки. В работах [2,3] различными методами измерены термокапиллярные деформации в неизотермической стекающей пленке жидкости.

Целью данной работы является определение особенности динамики и течения тонкой пленки жидкости при изменении размера локального источника тепла на подложке. Рассматривается стекание под действием силы тяжести пленки вязкой несжимаемой жидкости по плоской поверхности, наклоненной к горизонту под углом  $\alpha$ . Выберем систему декартовых координат  $x, y, z$  так, что ось  $Oz$  ортогональна к подложке, а ось  $Ox$  направлена в сторону действия скатывающей силы. Пусть жидкость

занимает область  $\Omega = \{(x, y, z) : -\infty < x, y < \infty, 0 < z < H(t, x, y)\}$ , где  $H$  — толщина пленки. На подложке расположен нагреватель шириной  $B$  и длиной по потоку  $L$ , с центром в начале координат. Динамический коэффициент вязкости  $\mu$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  зависят от температуры:  $\mu = \mu(T)$ ,  $\sigma(T) = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_T = \text{const} > 0$ . Движение пленки жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и переноса энергии, условия теплового баланса на подложке и на поверхности раздела газ–жидкость записываются в общем виде:  $kT_z - b_1(T - T_1) = -q_1$  при  $z = 0$  и  $k\partial T/\partial n + b_2(T - T_2) = 0$  при  $z = H$ . Здесь  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $b_1$ ,  $b_2$  — коэффициенты теплообмена,  $q_1$  — задаваемый тепловой поток,  $T$  — температура жидкости,  $T_1$  — температура подложки, а  $T_2$  — температура внешней среды в некотором удалении от соответствующих поверхностей раздела,  $T_0$  — начальная температура жидкости,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\mathbf{n}$  — орт нормального вектора,  $T_z$  — дифференцирование по  $z$ . Постановка задачи и вывод уравнений тонкого слоя для безразмерных толщины  $h$  и температуры  $\theta$  пленки (1)–(2) подробно описаны в [4]. В задаче делается замена переменных: вместо координаты  $z$  и компонент вектора скорости  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  используются координата  $\xi = z/H(t, x, y)$  и модифицированные компоненты вектора скорости  $u^1 = uH$ ,  $v^1 = vH$ ,  $w^1 = w - u\xi H_x - v\xi H_y$ . Тогда уравнения движения записываются в полосе  $0 < \xi < 1$ ,  $-\infty < x, y < \infty$ , что приводит к упрощению задачи: область пространственных переменных становится не зависящей от времени и имеющей плоскую свободную границу; уравнение неразрывности сохраняет свой вид, а кинематическое условие упрощается и становится линейным. Для приведения поставленной задачи к безразмерному виду задаются масштабы размерных величин — толщины пленки, интенсивности нагрева, скорости жидкости продольной длины:

$$H_0 = \sup_{t,y} \lim_{x \rightarrow -\infty} H(t, x, y), \quad Q = \sup_{t,x,y} \frac{q}{k}, \quad U = \frac{\mu_0}{\rho H_0}, \quad l = \left( \frac{\sigma_0 H_0^2}{\rho U^2} \right)^{1/3}.$$

Здесь  $\mu_0 = \mu(T_0)$ . Масштабы  $H_0$ ,  $Q$ ,  $U$  часто использовались раньше в различных работах; величина  $l$  является аналогом капиллярной длины и введена специально для приведения задач динамики локально нагреваемых жидких пленок к безразмерному виду. Далее, считая, что имеет место приближение тонкого слоя, при котором  $\varepsilon = H_0/l \ll 1$ , уравнения тонкого слоя для толщины пленки и температуры записыва-

ются в следующем виде:

$$h_t + \left[ h^3 \varphi(\Delta h - Ah + Cx)_x + Mah^2 \gamma \tilde{\theta}_x \right]_x + \left[ h^3 \varphi(\Delta h - Ah)_y + Mah^2 \gamma \tilde{\theta}_y \right]_y = 0, \quad (1)$$

$$Dh [h\theta_t + u\theta_x + v\theta_y + (w - \xi w|_{\xi=1})\theta_\xi] = \varepsilon^2 h^2 \Delta \theta + [1 + \varepsilon^2 \xi^2 (h_x^2 + h_y^2)] \theta_{\xi\xi} - 2\xi \varepsilon^2 h (h_x \theta_{x\xi} + h_y \theta_{y\xi}) + \varepsilon^2 \xi^2 [2(h_x^2 + h_y^2) - h\Delta h] \theta_\xi. \quad (2)$$

В уравнении переноса тепла удерживаются все члены, в том числе и непорядковые. Отбрасывание младших членов здесь не только не упростит процедуру его решения, но наоборот усложнит ее, потому что полное уравнение (2) имеет параболический тип, а упрощенное станет ультрапараболическим, и построить его решение, в том числе и численное, будет гораздо труднее. Определим функции  $\tilde{\theta} = \theta|_{\xi=1}$ ,  $F(t, x, y, \xi)$ ,  $G(t, x, y, \xi)$ ,  $\Phi(t, x, y, \xi)$ ,  $\Gamma(t, x, y, \xi)$ ,  $\varphi(t, x, y)$ ,  $\gamma(t, x, y)$ :

$$F = \int_0^\xi \frac{1 - \tau}{\mu(\theta(t, x, y, \tau))} d\tau, \quad G = \int_0^\xi \frac{1}{\mu(\theta(t, x, y, \tau))} d\tau,$$

$$\Phi = \int_0^\xi F(t, x, y, \tau) d\tau, \quad \Gamma = \int_0^\xi G(t, x, y, \tau) d\tau,$$

$$\varphi = \Phi|_{\xi=1}, \quad \gamma = \Gamma|_{\xi=1}.$$

Здесь безразмерные критерии подобия  $A$ ,  $C$ ,  $Ma$  задаются формулами

$$A = \frac{g \sin \alpha H_0^3}{U^2 l^2} = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{Fr}, \quad C = \frac{g \cos \alpha H_0^2}{U^2 l} = \frac{\cos \alpha}{Fr},$$

$$D = \frac{H_0 \mu_0 c_p}{l \kappa}, \quad Ma = \frac{\sigma_T Q H_0^2}{\mu_0 U l}.$$

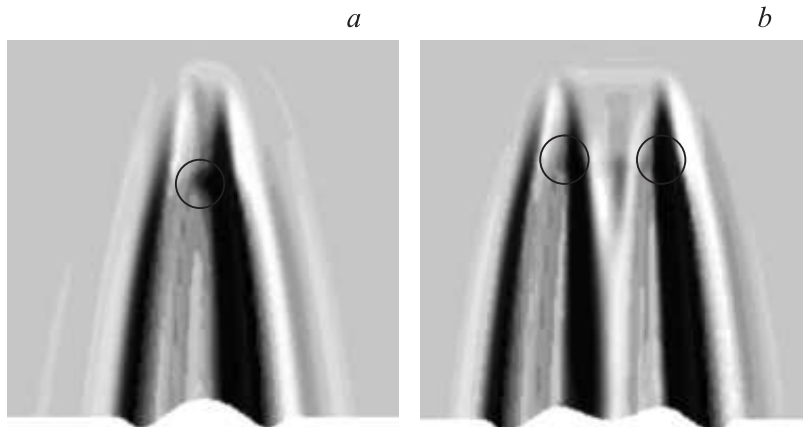
Числа  $A$ ,  $C$  задают вклад в градиент давления его гидростатических (продольной и поперечной) составляющих,  $Ma$  является модифицированным числом Марангони, задающим вклад термокапиллярных сил, действующих на поверхности неоднородно нагретой пленки. Число  $D$

является отношением порядков интенсивностей кондуктивных и конвективных потоков тепла в пленке. Таким образом, для определения функций  $h(t, x, y)$ ,  $\theta(t, x, y, \xi)$  имеем систему уравнений (1), (2), а функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  определяются с помощью явных формул. Полагаем, что в начальный момент времени распределение температуры однородно и пленка невозмущенная, а для других значений времени при удалении от места нагрева все возмущения затухают. Численное решение проводилось следующим образом. Решение задачи в неограниченной по  $x$ ,  $y$  области заменялось решением в области  $\{x \in (-x_1, x_2), y \in (-y_1, y_2)\}$ . Начальные условия и условия теплового баланса сохраняют свой вид, а краевые условия переносятся на новые границы так:

$$h|_{x=-x_1} = h|_{y=-y_1} = h|_{y=y_2} = 1, \quad \theta|_{x=-x_1} = \theta|_{y=-y_1} = \theta|_{y=y_2} = 0,$$

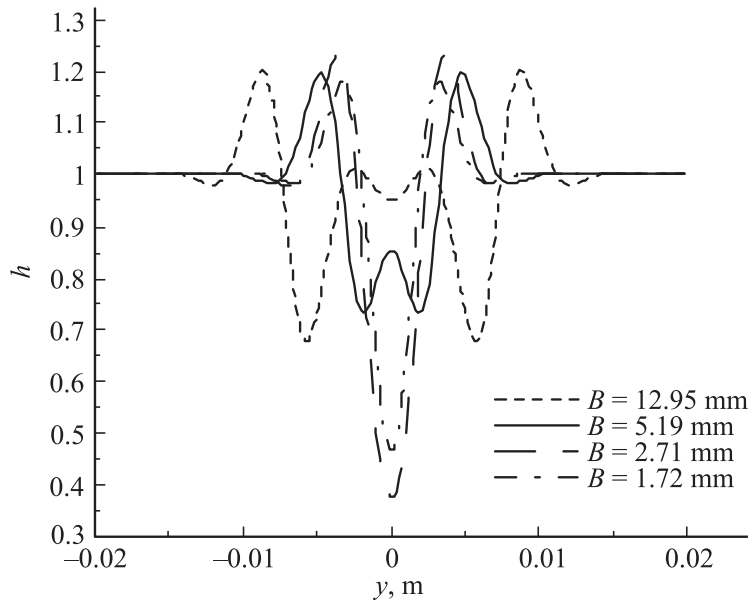
$$h_x|_{x=-x_1} = h_y|_{y=-y_1} = h_y|_{y=y_2} = h_x|_{x=x_2} = h_{xx}|_{x=x_2} = 0, \quad \theta_x|_{x=x_2} = 0.$$

Поскольку здесь значения неизвестных функций  $\theta$  и  $h$  на границе  $x = x_2$  уже нельзя считать заданными, то соответствующие условия заменены „мягкими“. Системы разностных уравнений в задаче представляют собой двухслойные неявные разностные схемы для параболических уравнений. Уравнения решались с помощью метода расщепления по пространственным переменным путем введения дробных шагов. Для изучения возможного влияния размера нагревателя были проведены следующие расчеты. Предполагалось, что свободная поверхность пленки и подложка теплоизолированы, нагрев имеет место только со стороны подложки, причем его интенсивность всюду нулевая, за исключением некоторой ограниченной области (на нагревателе), внутри которой она постоянная. Считалось, что газ и подложка имеют ту же температуру, что и натекающая сверху жидкость:  $T_1 = T_2 = T_0$ . Угол наклона подложки к горизонту брался равным  $\pi/2$ , а материальные постоянные жидкости и функции  $\mu(T)$ ,  $\sigma(T)$  соответствовали 25%-ному раствору этилового спирта в воде при 20°C. Расчеты проводились для прямоугольного нагревателя различной ширины поперек потока  $B$ , от 1.72 до 12.95 mm, и постоянной длины по потоку  $L$ , равной 10.92 mm. Тепловой поток  $q_1$  равен 0.5 W/cm<sup>2</sup>, число Рейнольдса жидкости  $Re$  бралось равным 1 или 0.5. Рассчитывались поля температуры, скоростей и положение свободной поверхности пленки. Обнаружено, что размер нагревателя поперек потока существенно влияет на трехмерные термокапиллярные деформации поверхности пленки, изменяя ее течение.



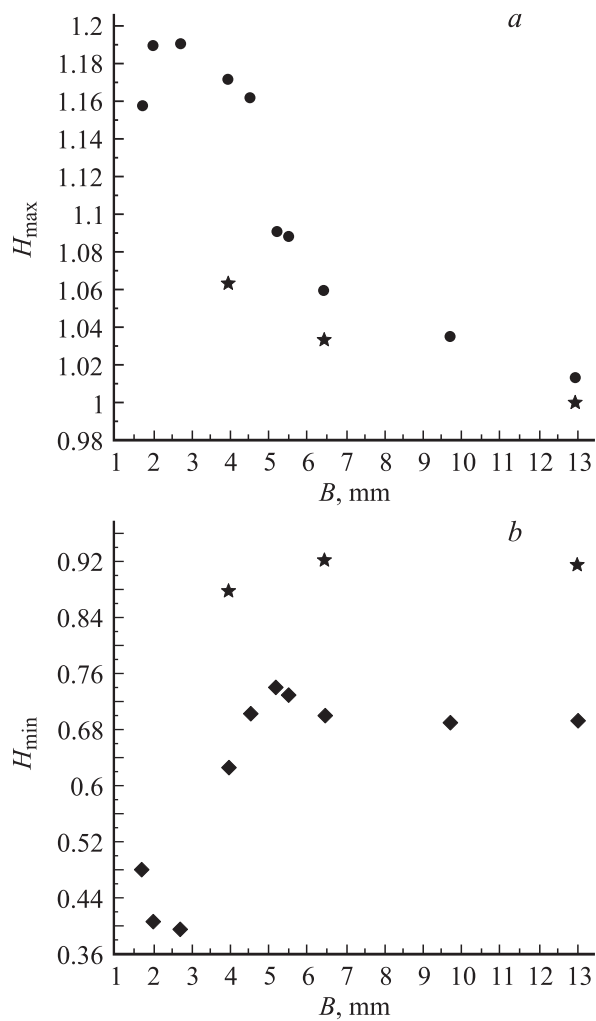
**Рис. 1.** Термокапиллярные деформации поверхности пленки при различных значениях ширины нагревателя на подложке.  $Re = 0.5$ ,  $q = 0.5 \text{ W/cm}^2$ . *a* —  $B = 3.95 \text{ mm}$ , *b* —  $B = 12.95 \text{ mm}$ . Отдельно отмечены точки максимального утончения пленки.

На рис. 1, *a, b* приведена картина развития термокапиллярных деформаций после включения нагрева. Можно заметить, что имеет место возникновение и сложное взаимодействие возникающих поверхностных структур (валиков, стекающих струй, утончений пленки). Среди данных расчетов особый интерес вызывает наименьшая достигаемая толщина, сильные утончения создают предпосылки для разрыва пленок. Как видно при значениях  $B$  менее некоторого критического значения, между двумя основными боковыми волнами исчезает срединная струя, тем самым меняется положение точки максимального утончения пленки. В общем, локализация наибольшей достигаемой температуры вполне предсказуема: она имеет место на нижней части нагревателя, вблизи центральной оси. Однако расположение максимума температуры на подложке различно для различных нагревателей, при росте ширины нагревателя максимум смещается от центра к его краям, что может быть возможным объяснением изменения характера деформаций поверхности пленки. Кроме того, показано, что максимальная и минимальная толщины пленки в области нагревателя, как и максимальная температура поверхности пленки, существенно зависят от размера нагревате-



**Рис. 2.** Положение свободной границы пленки в направлении поперек потока при  $x = 5.46$  mm (край нагревателя) для различных значений ширины нагревателя.  $Re = 0.5$ ,  $q = 0.5$  W/cm<sup>2</sup>.

ля. Обнаружено существование, по крайней мере, двух критических значений ширины нагревателя. При уменьшении ширины существует некое значение  $B$ , после достижения которого дальнейшее уменьшение ширины существенно влияет на деформации поверхности пленки, которые значительно усиливаются. При дальнейшем уменьшении  $B$  наблюдается следующее критическое значение, после достижения которого деформации уменьшаются. Деформации наиболее существенны, когда значение  $B$  находится между данными критическими значениями. При ширине нагревателя, сравнимой с его длиной, срединная струя, находящаяся между двумя основными боковыми волнами, становится нестабильной и разделяется надвое (рис. 2). Влияние изменения ширины нагревателя на максимальную и минимальную толщины пленки в районе нагревателя при достаточно больших значениях  $B$  не столь



**Рис. 3.** Максимальная (*a*) и минимальная (*b*) толщины пленки в районе нагревателя при различных значениях ширины нагревателя на подложке: *a*: круг —  $Re = 0.5$ , звезда —  $Re = 1$ ; *b*: ромб —  $Re = 0.5$ , звезда —  $Re = 1$ .

существенно, но начинает значительно возрастать при достижении значением  $B$  некоторых критических значений (рис. 3,  $a, b$ ). Видно, что утончения пленки значительнее, чем ее утолщения. Это может иметь значение для возникновения разрыва пленки. При увеличении числа Рейнольдса деформации пленки уменьшаются и структуры сжимаются в направлении поперек потока. Критическое значение ширины нагревателя, при котором исчезает срединная струя, уменьшается. Кроме того, с ростом  $Re$  значение  $B$ , при котором точка максимума температуры на подложке сдвигается из центра нагревателя к его краям, возрастает, что может являться возможным объяснением изменения характера течения пленки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-08-01127.

## Список литературы

- [1] Кабов О.А. // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5. № 4. С. 597–602.
- [2] Кабов О.А., Легро Ж.К., Марчук И.В. и др. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 3. С. 200–208.
- [3] Zaitsev D.V., Kabov O.A., Evseev A.R. // Experiments in Fluids. 2003. V. 34. P. 748–754.
- [4] Kabova Yu.O., Kuznetsov V.V., Kabov O.A., Legros J.-C. // Proceedings of International Conference on Multiphase Flow. ICMF. 2007. Leipzig, Germany, July 9–13, 2007, paper # ICMF2007-S5\_Wed\_B\_35, CD-ROM ISBN: 978-3-86010-913-7. 2007. P. 1–8.